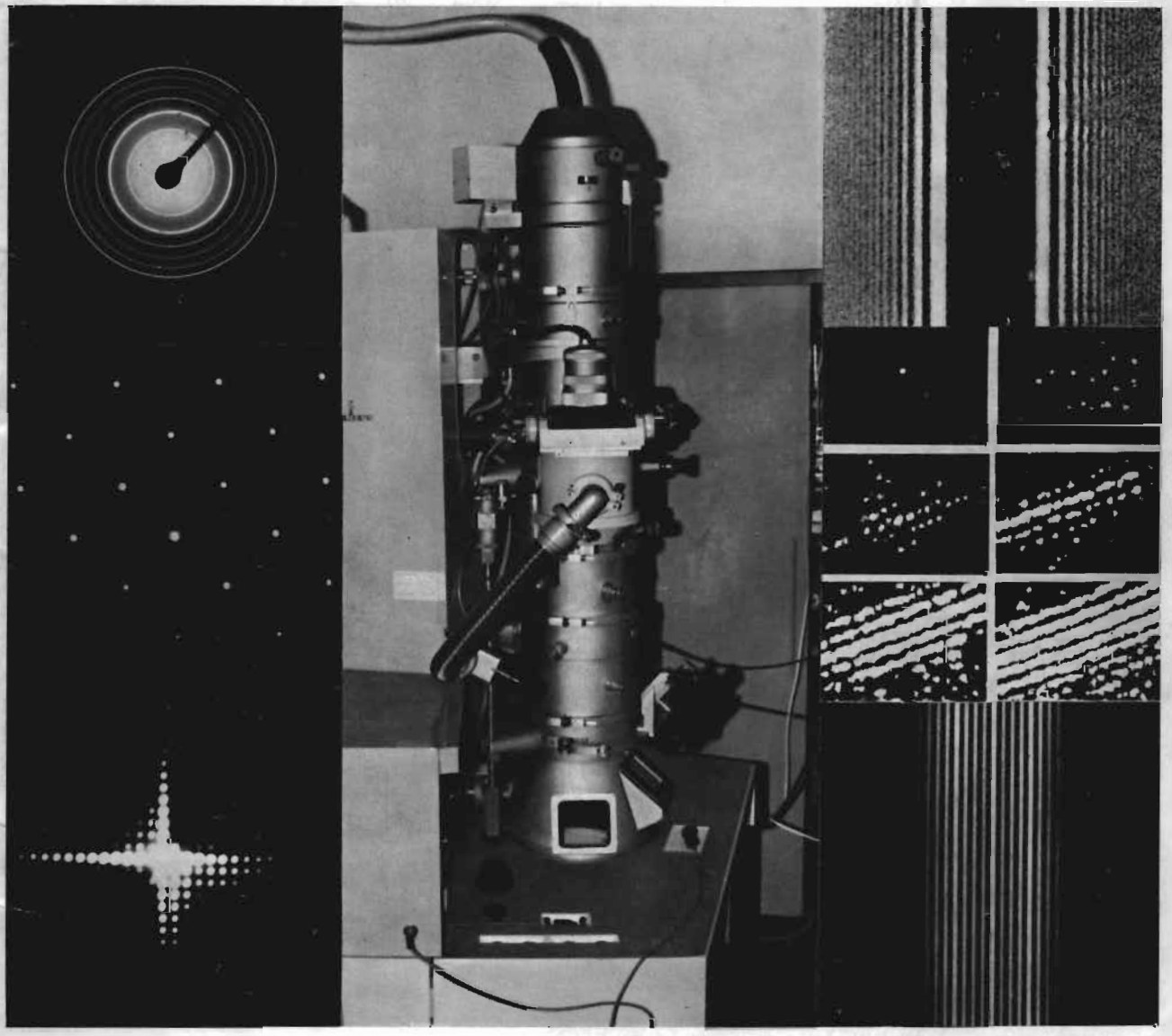
3

GIORNALE DI FISICA

volume 15
Luglio-Settembre
1974

Società Italiana di Fisica



EDITRICE
COMPOSITORI
BOLOGNA

Estratto dal *Giornale di Fisica* - Vol. XV - N. 3 - Luglio-Settembre 1974

Diffrazione ed interferenza di elettroni.

I. - Diffrazione.

G. Pozzi
C.N.R., G.N.S.M., Laboratorio di Microscopia Elettronica dell'Istituto di Fisica - Bologna

G. F. Missiroli
C.N.R., G.N.S.M., Istituto di Fisica - Bologna

P. G. Merli
C.N.R., L.A.M.E.L. - Via Castagnoli, 1 - Bologna

1. Introduzione (*).

Fino ai primi anni di questo secolo nel pensiero dei fisici era radicato il concetto che la luce si comportasse come un'onda e che in base a questo modello fosse possibile spiegare tutti i fenomeni dell'ottica. Ad avvalorare queste idee avevano profondamente contribuito le celebri esperienze di Young e di Fresnel sull'interferenza e diffrazione della luce ed il lavoro teorico di Maxwell che aveva dimostrato come la luce non fosse altro che propagazione nello spazio di onde elettromagnetiche di piccola lunghezza d'onda.

Grande perplessità pertanto suscitarono, anche negli stessi autori, le interpretazioni di Planck (1900) e di Einstein (1905) dello spettro del corpo nero e dell'effetto fotoelettrico da cui emergeva la necessità di introdurre un comportamento di tipo corpuscolare per la luce (quanti di luce o fotoni).

Tuttavia cosí come la teoria ondulatoria non era in grado d'interpretare l'effetto fotoelettrico, la teoria corpuscolare a sua volta si trovava nelle stesse difficoltà per interpretare le esperienze d'interferenza e diffrazione.

Lo stesso dualismo si ripresentò anche per le particelle materiali quando de Broglie nel 1924 propose di concepirle come onde cui era associata una lunghezza d'onda λ:

$$\lambda = h/p\,, \tag{1}$$

dove h è la costante di Planck e p la quantità di moto della particella.

Ci si trovò nuovamente di fronte ad una situazione che a prima vista si presentava come una contraddizione insolubile, nel senso che si era incapaci di tradurla nei termini della nostra esperienza quotidiana dove i concetti di onda e corpuscolo sono legati a momenti completamente distinti.

(*) Per un eventuale approfondimento degli argomenti svolti in questo articolo si rimanda alle seguenti opere di carattere generale: S. I. Tomonaga: *Quantum Mechanics*, Vol. I (Amsterdam, 1962), Vol. II (Amsterdam, 1966); M. Born ed E. Wolf: *Principles of Optics* (New York, N. Y., 1959); O. Klemperer: *Electron Physics* (London, 1959); P. W. Hawkes: *Electron Optics and Electron Microscopy* (London, 1972).

Dalla meccanica classica si estrapola infatti il concetto di particella come un « grumo piccolissimo di materia » a cui si può associare una posizione ben definita nello spazio e nel tempo. Nei laboratori di ottica si è invece imparato ad intendere un'onda come una perturbazione che si ripete periodicamente nello spazio e nel tempo ed a cui si associano una propagazione continua ed i caratteristici fenomeni d'interferenza e di diffrazione. Inoltre le quantità usate per caratterizzare un'onda (ampiezza, lunghezza d'onda, frequenza) sembrano perdere completamente di significato se si trasferiscono ad una particella.

Il superamento di questa antinomia sia per la luce che per le particelle avvenne a partire dal 1926 quando furono gettate le basi della meccanica quantica.

A tutt'oggi la validità della relazione (1) di de Broglie è ogni giorno verificata nei molti esperimenti eseguiti a livello di fisica atomica e con particelle elementari; tuttavia la complessità di questi esperimenti e l'astratto formalismo matematico necessario per interpretarli non sempre permettono di mettere in evidenza in maniera semplice e chiara gli elementi base della teoria.

Nel presente lavoro si mostra come, utilizzando un microscopio elettronico a trasmissione, sia possibile progettare e realizzare tutta una serie di esperienze che, da una parte, sono una conferma diretta della relazione di de Broglie relativamente agli elettroni, dall'altra, rendono di facile comprensione l'interpretazione del comportamento ondulatorio in termini statistici.

Il lavoro sarà diviso in due parti. Nella Parte I, dopo avere illustrato il principio di funzionamento del microscopio elettronico, saranno presentate alcune esperienze di diffrazione. Verificata sperimentalmente la relazione (1) di de Broglie sarà quindi ricavato il valore numerico della costante h di Planck.

Nella Parte II si mostrerà come sia possibile progettare e realizzare, fra le tante, un'esperienza d'interferenza di elettroni perfettamente analoga all'esperienza del biprisma di Fresnel in ottica.

L'interpretazione statistica delle frange di interferenza sarà messa in evidenza applicando al microscopio elettronico un intensificatore di immagini che consente di rivelare l'arrivo dei singoli elettroni.

2. Considerazioni generali.

Storicamente fu un'esperienza di diffrazione con elettroni riflessi da un monocristallo di nichel, effettuata da Davidson e Germer nel 1927, che dette un primo valido supporto sperimentale all'ipotesi di de Broglie. Gli autori usarono elettroni accelerati sotto una differenza di potenziale di poche centinaia di volt.

Una dimostrazione piú convincente è stata eseguita nel 1928 da Rupp, che ottenne picchi di diffrazione facendo riflettere elettroni aventi energia di 150 eV (lunghezza d'onda associata $\lambda \cong 1$ Å) da un reticolo macroscopico di 7 μm di passo.

Successivamente il quadro sperimentale dei fenomeni di diffrazione fu completato attraverso l'osservazione di frange di diffrazione dovute sia ad un bordo netto, sia ad una fenditura, sia ad un filo opaco. In ognuno di questi casi era sempre verificata la perfetta corrispondenza fra la spaziatura delle frange di diffrazione e la lunghezza d'onda prevista da de Broglie.

Oggi ciascuna di queste esperienze

con elettroni può essere ripetuta, con un grado piú o meno grande di precisione, usando come strumento base un moderno microscopio elettronico a trasmissione. In esso gli elettroni vengono accelerati sotto differenze di potenziale dell'ordine di diverse decine di kilovolt (*), ossia con lunghezze d'onda associate per la (1) di qualche centesimo di ångstrom.

Una tale lunghezza d'onda rivela immediatamente quali siano le difficoltà tecniche per la realizzazione delle precedenti esperienze entro un tubo a vuoto, senza l'ausilio delle lenti elettromagnetiche di cui sono forniti i microscopi elettronici.

Considerando la distanza d fra i piani reticolari di un cristallo dell'ordine di qualche Å, dalla relazione di Bragg

$$2d \sin\theta = n\lambda \tag{2}$$

si vede che lo spettro del primo ordine si forma ad angoli di 10^{-2} radianti. Questa esperienza che, come vedremo, è l'unica realizzabile anche in un tubo a vuoto (1), ha bisogno quindi di una lunghezza della camera L (distanza fra campione e lastra fotografica) di circa 1 metro per avere dei massimi di diffrazione distanti un centimetro tra di loro.

Per eseguire in trasmissione l'esperimento analogo a quello di Rupp, avendo un reticolo sottile e di passo dell'ordine di qualche decimo di micron, si ottengono angoli di deflessione di 10^{-5} radianti. Per ottenere un'immagine di diffrazione confrontabile con quella precedente occorre una lunghezza della camera di 1000 metri!

Se infine vogliamo osservare le frange di diffrazione dovute ad uno spigolo vivo di un campione le distanze in gioco risultano ancora maggiori. Infatti la spaziatura F della prima frangia di diffrazione è legata alla distanza Z fra campione e schermo ed alla lunghezza d'onda dalla relazione

$$F \cong \sqrt{Z\lambda}\,. \tag{3}$$

Se si vuole che F risulti dell'ordine di 0.1 mm, con $\lambda = 0.04$ Å risulta $Z = 2500$ m.

Le considerazioni precedenti sugli ordini di grandezza permettono di ricavare risultati necessari ma non sufficienti per l'ottenimento dei massimi di diffrazione. Occorre infatti tenere conto anche delle condizioni di coerenza della sorgente di elettroni. Considerazioni perfettamente analoghe a quelle che si fanno in ottica (2) per valutare la coerenza della sorgente, portano a ricavare che le dimensioni angolari della sorgente di elettroni vista dal campione devono essere minori degli angoli che si vogliono separare, cioè nei tre casi discussi rispettivamente minori di 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-6} radianti.

Pertanto, prima di passare a discutere come sia possibile realizzare sperimentalmente entro un microscopio elettronico queste esperienze di diffrazione, illustreremo brevemente il principio di funzionamento dello stesso impiegato in veste di banco elettro-ottico.

(*) Normalmente un microscopio elettronico commerciale a trasmissione opera con tensioni acceleratrici comprese tra 30 e 100 kV. Questa scelta è stata dettata principalmente da motivi economici e pratici relativi alla messa a punto dell'alimentazione ad alta tensione e da considerazioni empiriche sulle caratteristiche delle immagini e sulla preparazione dei campioni da osservare.

(1) C. SABBIONI: *Giornale di Fisica*, **10**, 234 (1969).

(2) C. PONTIGGIA: *Giornale di Fisica*, **11**, 163 (1970).

3. Il microscopio elettronico.

3·1. *Princípi fisici di funzionamento.* – Sebbene l'impulso per la realizzazione del microscopio elettronico sia venuto proprio dalla scoperta di de Broglie e dalla speranza di raggiungere risoluzioni subatomiche, gli elementi base per sviluppare un'ottica geometrica delle particelle erano già stati gettati da Hamilton nel 1828. Tuttavia, ancora prima, era stata notata la somiglianza tra le leggi della meccanica classica e quelle dell'ottica geometrica; infatti fu su questa similarità che Newton cercò di sviluppare una teoria corpuscolare della luce.

Per semplicità illustriamo il caso semplice della rifrazione della luce, descritta dalla nota legge di Snellius, adattando il ragionamento originale di Newton al caso di un elettrone che è trasmesso attraverso un gradino di potenziale da uno spazio in cui il potenziale è V' in un altro in cui il potenziale è V''. Al gradino la traiettoria dell'elettrone cambierà bruscamente la sua direzione come mostrato in fig. 1. Assumendo il potenziale V'' positivo rispetto a V', la componente normale v_y della velocità dell'elettrone aumenterà, essendo l'elettrone accelerato nella direzione perpendicolare al gradino. La componente tangenziale v_x rimarrà inalterata. Con riferimento alla fig. 1 l'angolo di incidenza e quello di rifrazione

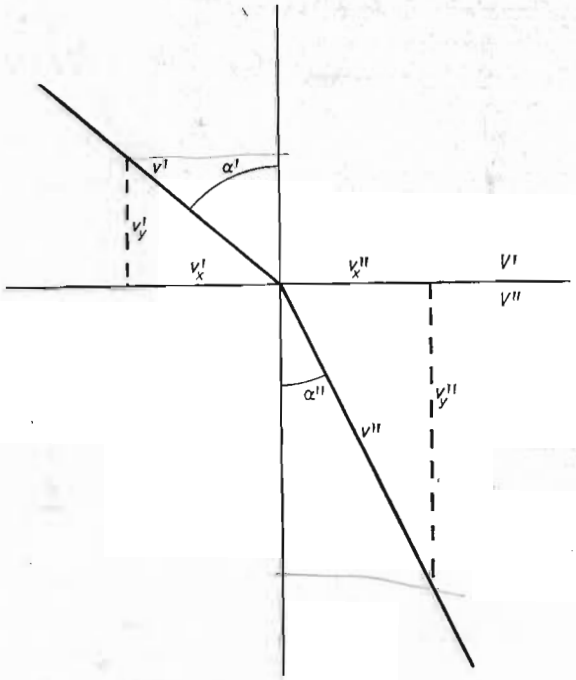


Fig. 1. – Rifrazione di un fascio elettronico nel passaggio da una regione a potenziale V' ad un'altra a potenziale V'' con $V'' > V'$.

φ sono dati da

$$(4) \qquad \sin\alpha' = v'_x/v', \qquad \sin\alpha'' = v''_x/v'',$$

pertanto essendo $v'_x = v''_x$

$$(5) \qquad v' \sin\alpha' = v'' \sin\alpha''.$$

Per il principio di conservazione dell'energia, nel caso non relativistico, si

ha che

$$eV - mv^2/2 = \text{cost}, \tag{6}$$

ove e ed m rappresentano rispettivamente la carica e la massa dell'elettrone. Scegliendo il potenziale V in modo tale che la costante sia nulla, possiamo misurare l'energia cinetica $mv^2/2$ in un punto generico tramite il potenziale. Con questa convenzione possiamo scrivere la (6) nella forma

$$eV = mv^2/2, \quad \text{ossia} \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}, \tag{7}$$

per cui la (5) diventa

$$\sqrt{V'} \sin\alpha' = \sqrt{V''} \sin\alpha''. \tag{8}$$

Questa equazione è identica alla legge di Snell se prendiamo come indice di rifrazione n la radice del potenziale V.

Una variazione brusca nell'indice di rifrazione V, cosí come accade comunemente in ottica, non si presenta nell'ottica elettronica. Tuttavia è sempre possibile approssimare un potenziale che varia con continuità tramite un numero finito di gradini in ognuno dei quali il potenziale è costante. Possiamo cosí tracciare la traiettoria di un elettrone applicando ripetutamente la legge di Snell.

Le precedenti considerazioni assumono particolare interesse qualora si possano ottenere superfici equipotenziali di forma sferica; questo effettivamente accade nei campi elettrostatici a simmetria cilindrica vicino all'asse.

In fig. 2 è illustrato in sezione l'andamento di alcune superfici equipotenziali per un dispositivo formato da due tubi coassiali portati a diverso potenziale. In questo caso possiamo considerare il nostro campo come una successione di diottri sferici. Applicando ad essi gli stessi ragionamenti dell'ottica geometrica arriviamo alla conclusione che esso è in grado di darci un'immagine elettronica di un oggetto in quanto ricongiunge in un punto immagine B tutti gli elettroni provenienti da un punto oggetto A. Le linee tratteggiate in figura mostrano le traiettorie di due raggi parassiali. Da esse si deduce che la prima parte del campo agisce come una lente convergente, mentre la seconda come una lente divergente (confronta

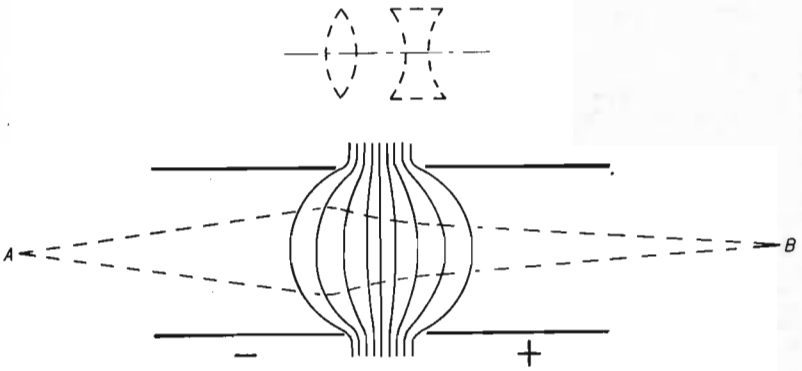


Fig. 2. – Sezione di lente elettrostatica formata da due cilindri coassiali portati a diverso potenziale. Nella parte superiore della figura è schematizzato l'equivalente ottico.

l'analogo ottico tratteggiato sopra la figura).

Queste considerazioni vennero riprese ed estese da Busch nel 1926 (un anno dopo la scoperta di de Broglie). Egli dette la dimostrazione rigorosa delle proprietà focalizzatrici non solo di campi elettrici statici a simmetria assiale, ma anche dei campi magnetici sempre a simmetria assiale.

La scoperta fu quasi immediatamente tradotta in un'applicazione pratica da Ruska e Knoll, che nel 1931 costruirono il primo microscopio elettronico. Da allora il perfezionamento tecnico ha raggiunto livelli tali che lo strumento, oltre ad essersi imposto come mezzo indispensabile di ricerca in svariati campi d'applicazione, consente di realizzare esperienze fondamentali di Fisica del tipo cui abbiamo accennato, in quanto le stringenti condizioni relative alla coerenza della sorgente ed agli ingrandimenti necessari per registrare le immagini possono venire soddisfatte senza insormontabili difficoltà sperimentali.

3·2. *Lo strumento.* – In linea di principio è possibile illustrare a blocchi il funzionamento di un microscopio elettronico facendo un parallelo fra le parti essenziali di un microscopio ottico e quelle di un microscopio elettronico (3). Se ci riferiamo ad un semplice microscopio ottico possiamo identificare tre parti essenziali: la sorgente di luce, la lente obbiettivo, la lente oculare. Analogamente in un semplice microscopio elettronico possiamo identificare, in perfetta analogia con quello ottico, le seguenti parti: la sorgente di elettroni, il campo elettrico (o magnetico) che funge da lente obbiettivo, il campo elettrico (o magnetico) che funge da lente oculare e che viene comunemente chiamato lente proiettivo.

A questo elementare schema di base dobbiamo tuttavia aggiungere alcune precisazioni che risulteranno piú chiare se facciamo riferimento alla fig. 3.

La sorgente di elettroni è costituita da un sottile filamento di tungsteno a forma di V che una volta portato all'incandescenza emette elettroni per effetto termoionico. Un opportuno alimentatore stabilizzato (circa 1 parte su 10^5 o 10^6) permette di applicare fra il filamento ed il diaframma che funge da anodo la differenza di potenziale desiderata per accelerare gli elettroni. Nei microscopi elettronici tale differenza di potenziale è dell'ordine di diverse decine di kV; oggi si costruiscono tuttavia anche microscopi elettronici in cui gli elettroni sono accelerati sotto una differenza di potenziale di alcuni milioni di volt. Un elettrodo di controllo consente la regolazione da zero ad un valore massimo dell'intensità degli elettroni che giunge sul campione. Un sistema di pompe permette di ottenere un vuoto dell'ordine di $(10^{-4} \div 10^{-5})$ Torr all'interno della colonna del microscopio in maniera che il libero cammino medio degli elettroni raggiunga valori superiori alla distanza fra il filamento e lo schermo onde evitare interazioni fra elettroni e gas residuo nella colonna. Come nel microscopio ottico anche qui il campione da osservare è posto fra la sorgente e la lente obbiettivo.

Oggigiorno le lenti elettrostatiche del tipo illustrato in fig. 2 sono quasi interamente soppiantate dalle lenti elettromagnetiche che offrono una maggiore flessibilità d'impiego. Esse sono realizzate mediante bobine che, percorse da una corrente continua e stabilizzata,

(3) U. VALDRÈ: *Misure e complementi di fisica* (Bologna, 1969).

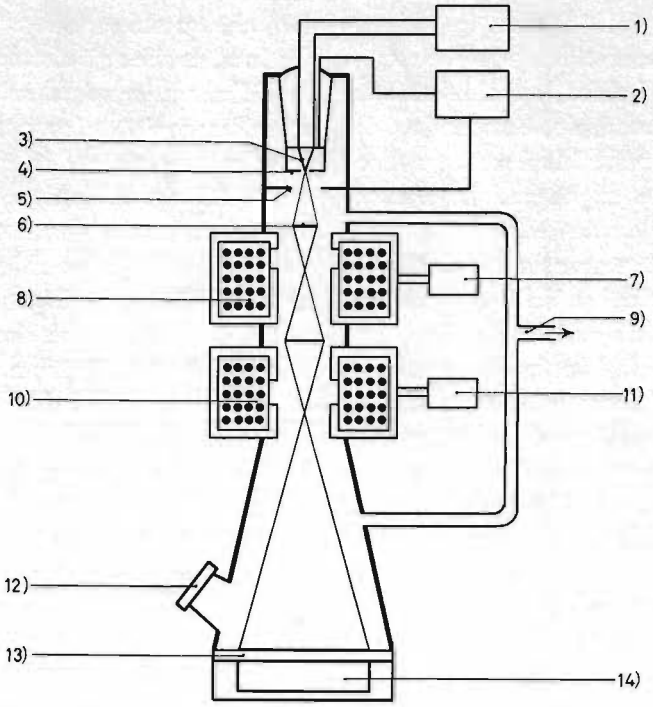


Fig. 3. – Schema elementare di un microscopio elettronico: 1) alimentatore per il riscaldamento del filamento, 2) alimentatore alta tensione, 3) filamento, 4) elettrodo di controllo, 5) anodo, 6) campione da osservare, 7) alimentatore di corrente per la lente obbiettivo, 8) lente obbiettivo, 9) tubazione impianto da vuoto, 10) lente proiettivo, 11) alimentatore di corrente per la lente proiettivo, 12) oblò di osservazione schermo finale, 13) schermo fluorescente finale, 14) porta lastre fotografiche.

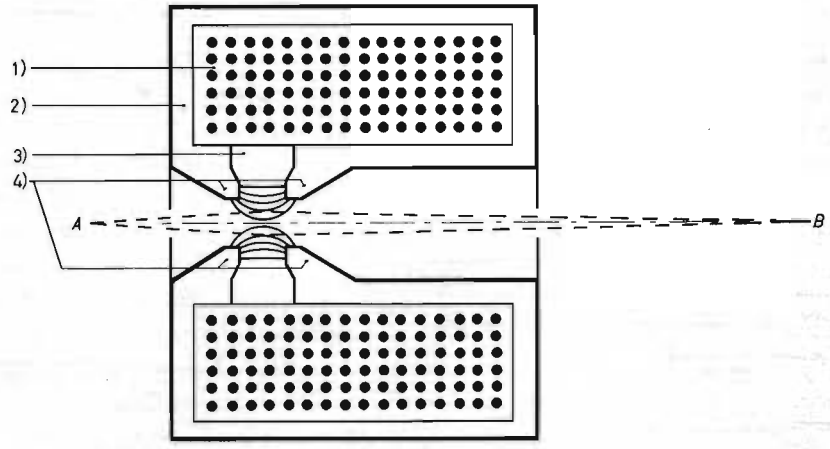


Fig. 4. – Sezione di una lente elettromagnetica: 1) avvolgimento della bobina, 2) camicia di materiale ferromagnetico, 3) traferro, 4) espansioni polari della lente.

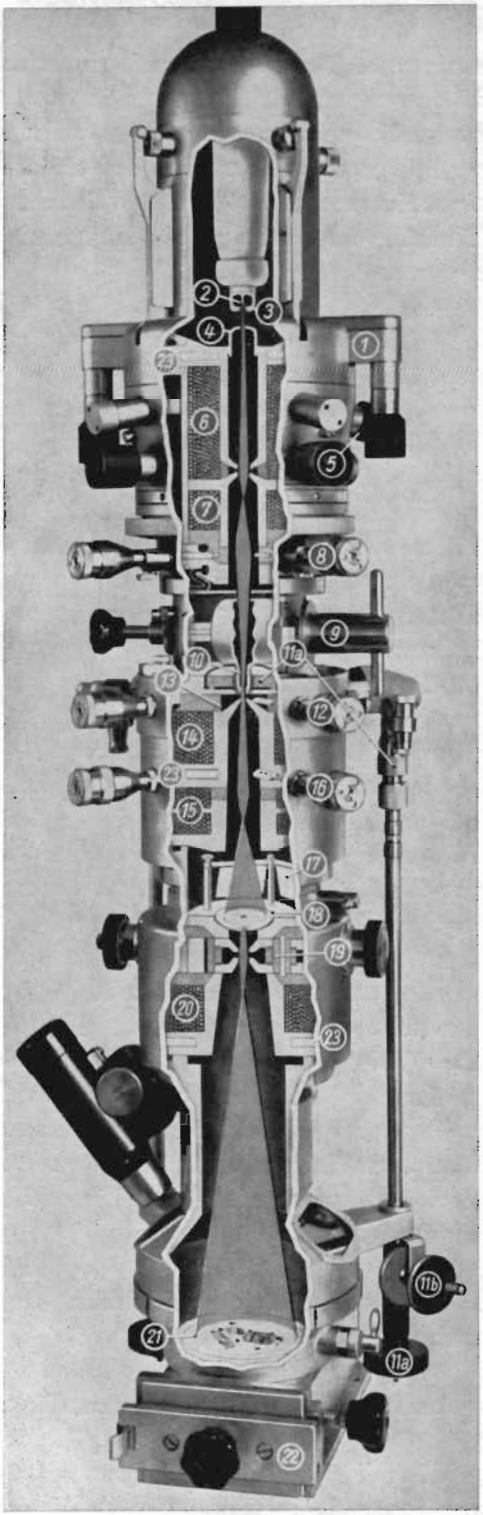
producono nel traferro un campo magnetico a simmetria assiale e costante nel tempo. La fig. 4 illustra in sezione lo schema di una tipica lente elettromagnetica. La bobina, avvolta attorno all'asse del microscopio, è circondata da una camicia di materiale ferromagnetico opportunamente sagomata. In questo modo è possibile ottenere, nella regione compresa fra le espansioni polari, un campo magnetico sufficientemente intenso a simmetria assiale. Le linee fra le espansioni polari in fig. 4 rappresentano le linee di forza del campo. Caratteristica di questo tipo di lenti è quella di dare un'immagine simile all'oggetto ma ruotata intorno all'asse della lente, dato che l'azione di un campo magnetico su di una particella carica in moto dà luogo ad una traiettoria spiraliforme.

La lente obbiettivo dà un'immagine ingrandita dell'oggetto. La lente proiettivo, costruita con gli stessi criteri della precedente, provvede a sua volta ad ingrandire questa immagine. Pertanto l'immagine finale, che può essere visualizzata su di uno schermo fluorescente, risulterà ingrandita rispetto all'oggetto di un fattore pari al prodotto dell'ingrandimento dell'obbiettivo per quello del proiettivo.

Da un punto di vista tecnico due sono le principali differenze che si possono riscontrare in questo parallelo fra microscopio ottico e microscopio elettronico. La prima è dovuta al fatto che in un microscopio ottico l'immagine è virtuale e pertanto non può essere direttamente fotografata su di una lastra posta sopra l'oculare. In un microscopio elettronico l'immagine prodotta dalla lente proiettivo è invece reale e, oltre ad essere visibile sullo schermo finale fluorescente, può essere direttamente fotografata su comuni lastre fotografiche (messe anch'esse sotto vuoto entro la colonna del microscopio, vedi fig. 3) dato che queste sono sensibili, oltre che alla luce, anche agli elettroni. La seconda differenza consiste nel fatto che, in un microscopio ottico, per cambiare ingrandimento occorre in generale sostituire o la lente obbiettivo o la lente oculare od entrambe con lenti di diversa distanza focale. In un microscopio elettronico invece è sufficiente mutare l'intensità di corrente che circola nelle bobine delle lenti elettromagnetiche per modificare l'intensità del campo magnetico, ossia, in definitiva, per variare la focale della lente magnetica. È così possibile, entro ampi limiti, mutare con continuità la distanza focale delle lenti del microscopio e di conseguenza gli ingrandimenti.

Spingendo più a fondo il nostro parallelo fra i due tipi di microscopi, possiamo puntualizzare che anche per i microscopi elettronici, come per quelli ottici, si sono aggiunti a corredo vari dispositivi che ne aumentano le prestazioni. Questo quando si voglia osservare ad alto potere risolutivo ossia, in definitiva, per potere lavorare al massimo degli ingrandimenti utili possibili. Questi accessori fanno parte integrante sia dei microscopi ottici che elettronici condizionandone profondamente l'uso.

Così per avere il campione sufficientemente illuminato anche ad alto ingrandimento si sono dotati i microscopi ottici di particolari sistemi di lenti per concentrare il massimo della luce della sorgente sul preparato. Questi sistemi sono formati dall'insieme di una o più lenti e da diaframmi. Nei microscopi elettronici l'analogo è costituito da una o due lenti magnetiche chiamate condensatori e disposte fra il filamento e l'obbiettivo. Anch'esse, come le altre



lenti del microscopio sono a focale variabile e consentono, assieme ad una serie opportuna di diaframmi, di ottenere le migliori condizioni di « illuminazione » (vedi fig. 5).

L'insufficienza della luce nel microscopio ottico viene di solito superata dotando lo strumento di lampade puntiformi ad alta intensità. Nel microscopio elettronico l'analogo è costituito da particolari filamenti a punta molto aguzza (raggio di curvatura circa 1000 Å) chiamati filamenti a punta, i quali, nonostante emettano gli elettroni da un'area di pochi micron di diametro, hanno una brillanza superiore a quella dei filamenti normali in quanto irraggiano in un angolo solido piú ristretto.

Occorre infine precisare che, essendo il potere risolutivo di un buon microscopio elettronico dell'ordine di pochi ångstrom, è possibile osservare campioni con ingrandimenti utili di circa un milione di volte.

Fig. 5. – Spaccato del microscopio elettronico Siemens Elmiskop 1: 1) dispositivo aggiustamento cannone elettronico, 2) catodo o filamento, 3) elettrodo di controllo o cilindro di Wehnelt, 4) anodo, 5) dispositivo micrometrico per il centraggio dei condensatori, 6) condensatore 1, 7) condensatore 2, 8) dispositivo per inserire i diaframmi a livello dei condensatori, 9) dispositivo per inserire il campione sotto vuoto entro la colonna del microscopio, 10) cartuccia portacampioni, 11*a*), *b*) tavolino portaoggetti e sua regolazione micrometrica fine e grossa, 12) dispositivo per inserire diaframmi a livello del piano focale posteriore dell'obbiettivo (diaframma di apertura), 13) stigmatori dell'obbiettivo, 14) lente obbiettivo, 15) lente intermedia, 16) dispositivo per inserire i diaframmi sopra la lente intermedia (diaframma di campo), 17), 18) schermo fluorescente su cui si può osservare un'immagine intermedia tramite un sistema di specchi, 19) dispositivo a torretta per cambiare le espansioni polari nella lente proiettivo, 20) lente proiettivo, 21) schermo fluorescente finale, 22) camera sotto vuoto per contenere le lastre fotografiche, 23) impianto di raffreddamento ad acqua per le lenti.

Un tale ingrandimento viene di solito raggiunto inserendo dopo l'obbiettivo non una sola lente elettromagnetica (il proiettivo) ma un sistema di due o tre lenti che rendono lo strumento più versatile su tutto il campo degli ingrandimenti che vanno dalle poche centinaia di diametri fino ai valori massimi (lenti intermedie).

La fig. 5 mostra la sezione di un moderno microscopio elettronico. È questo uno dei microscopi da noi usati per eseguire le esperienze che verranno illustrate. Esso è costituito da due condensatori C_1 e C_2, da una lente obbiettivo *Ob*, da una lente intermedia *I* e da una lente proiettivo *P*. Il potenziale acceleratore può variare a scatti da 40 kV a 125 kV. Vari diaframmi possono essere inseriti dall'esterno per limitare l'apertura del fascio elettronico secondo le diverse esigenze.

I particolari criteri seguíti nella sua costruzione ne permettono quindi l'uso non solo come microscopio elettronico nel senso tradizionale della parola ma anche come banco elettro-ottico inteso come un insieme di cinque lenti, ciascuna in posizione fissa, ma a distanza focale variabile.

4. Esperienze di diffrazione (*).

Vediamo ora come sia sperimentalmente possibile realizzare le esperienze di diffrazione, alle quali si è fatto brevemente cenno nella Sezione **2**, utilizzando un microscopio elettronico.

(*) Per un esame completo della problematica connessa con la diffrazione elettronica si rimanda ad alcuni testi generali quali: C. E. HALL: *Introduction to Electron Microscopy* (New York, N. Y., 1953); R. D. HEIDENREICH: *Fundamentals of Transmission Electron Microscopy* (New York, N. Y., 1964); C. MAGNAN: *Traité de microscopie électronique* (Paris, 1961); G. THOMAS: *Transmission Electron Microscopy of Metals* (New York, N. Y., 1962).

Nella discussione delle stesse saranno riportate le condizioni di lavoro dello strumento. Tutte le fotografie mostrate in questa parte del lavoro ed in quella successiva sono state ottenute usando un microscopio elettronico di serie del tipo Siemens Elmiskop 101 o Siemens Elmiskop 1 A equipaggiati con filamenti a punta.

4·1. *Diffrazione da un reticolo cristallino.*

4·1.1. Considerazioni qualitative. La fig. 6 mostra il diagramma di diffrazione di un film di cloruro di tallio policristallino formata con elettroni accelerati sotto una d.d.p. di 100 kV. Esso è stato ottenuto tenendo spente tutte le lenti del microscopio al di sotto del preparato (ossia obbiettivo, intermedia e proiettivo).

Come mostra la fig. 7, si sono eccitati i condensatori in maniera da rimpicciolire la sorgente *S* tramite il primo condensatore e focheggiarla poi sullo schermo finale o sulla lastra fotografica *PH* tramite il secondo condensatore. La lunghezza *L* della camera è in questo caso pari alla distanza geometrica fra il campione *C* e la lastra fotografica *PH* e vale, per un Siemens Elmiskop 101 con cui è stata ottenuta la foto di fig. 7, $L = (780 \pm 1)$ mm.

La serie di anelli concentrici presenti nella figura di diffrazione può essere interpretata in maniera analoga a quanto avviene per i raggi X sulla base delle seguenti ipotesi:

i) che gli elettroni abbiano un comportamento ondulatorio,

ii) che gli atomi siano disposti regolarmente in una struttura cristallina.

Da tali ipotesi si può dedurre in primo luogo la relazione (2) di Bragg.

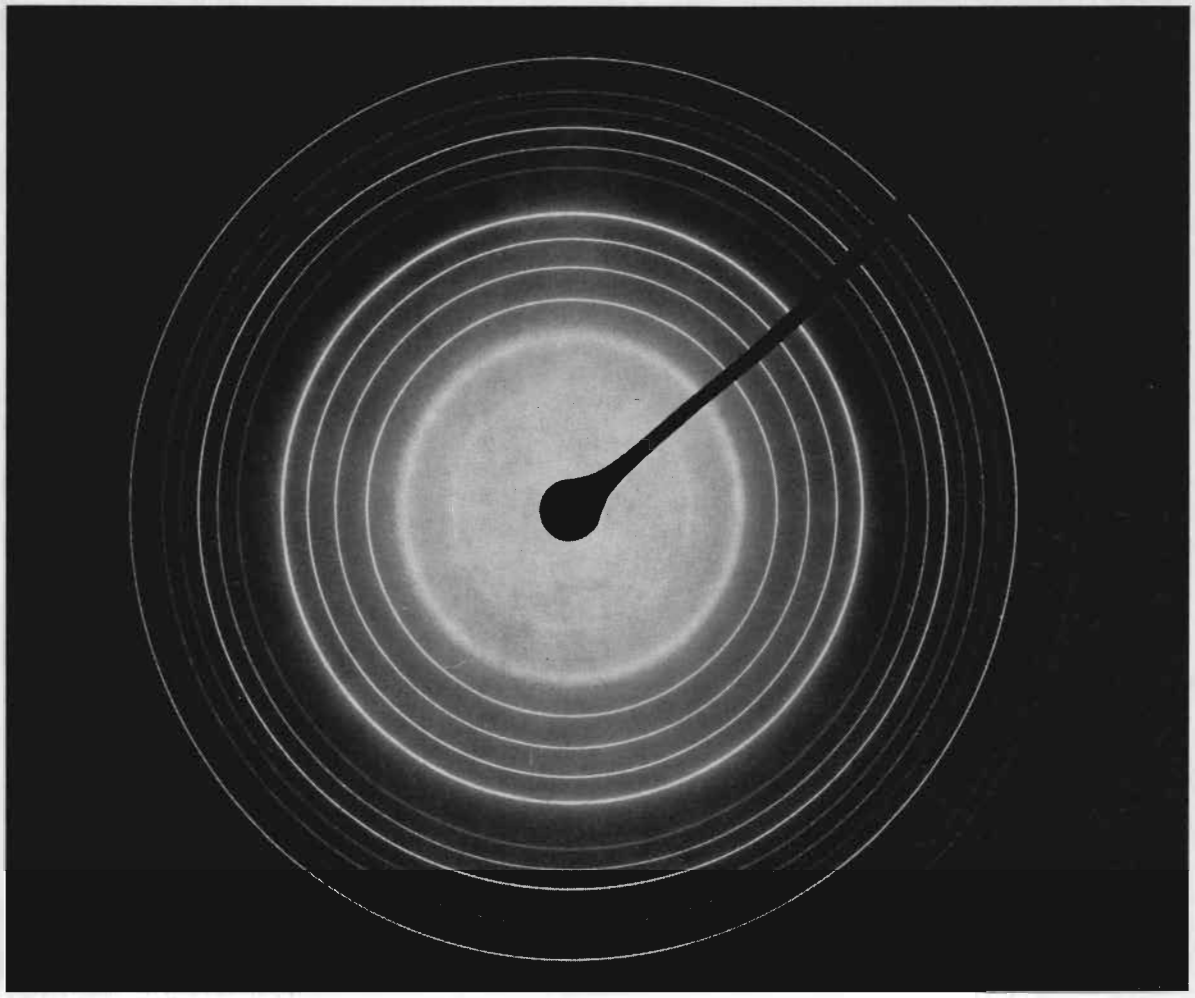


Fig. 6. – Diagramma di diffrazione di un film policristallino di cloruro di tallio ottenuto con elettroni accelerati sotto una d.d.p. di 100 kV. L'ombra scura è la proiezione di un braccio mobile il cui estremo viene portato ad intercettare gli elettroni del fascio primario onde permettere un sufficiente contrasto per i fasci diffratti.

Infatti, come mostrato in fig. 8, affinché si abbia interferenza costruttiva o rinforzo tra le onde diffuse da atomi situati nello stesso piano, l'angolo di incidenza θ deve essere uguale all'angolo di riflessione; inoltre raggio incidente, raggio riflesso e normale al piano cristallino devono essere coplanari.

La condizione di rinforzo per onde diffuse da atomi situati in piani adiacenti (ad esempio atomo A ed E) è che

$$(9) \quad CE - AB = CE - CD = DE = n\lambda$$

come può essere dedotto dalla geometria della figura. Ma

$$(10) \quad DE = [d/\cos\theta] \cdot \sin 2\theta = 2d \sin\theta,$$

che sostituita nella (9) dà immediatamente la legge di Bragg (2). Notiamo che il risultato non dipende dalla posizione laterale dell'atomo E rispetto al-

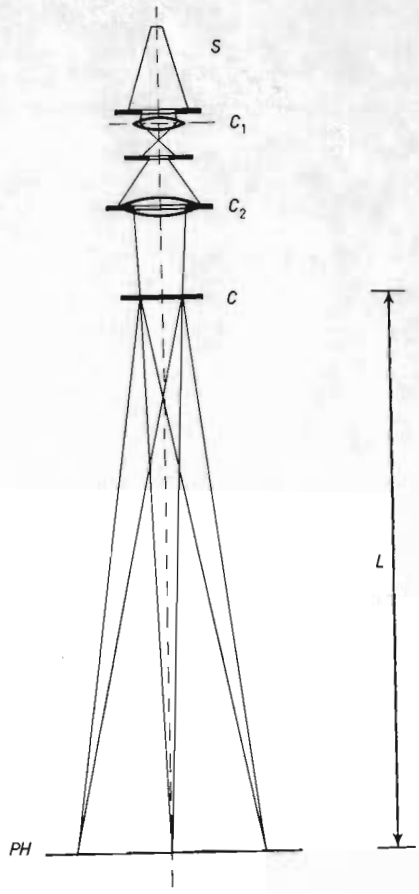


Fig. 7. – Diagramma che illustra come si è ottenuta l'immagine di diffrazione di cui alla fig. 6. I condensatori C_1 e C_2 sono eccitati in maniera tale da focalizzare la sorgente sulla lastra fotografica *PH*. Dato che le lenti obiettivo, intermedia e proiettivo non sono eccitate, la lunghezza *L* della camera coincide con la distanza geometrica fra il campione *C* e la lastra fotografica *PH*.

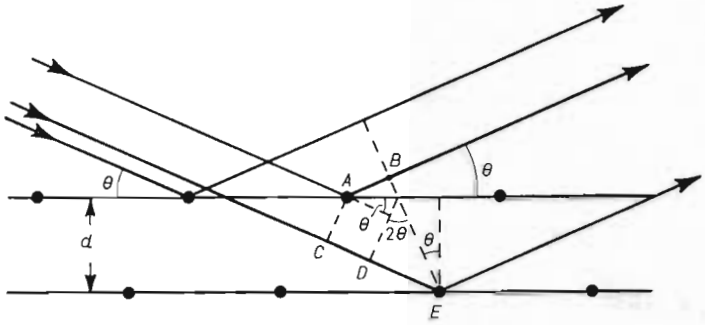


Fig. 8. – Condizioni geometriche per ricavare la legge di Bragg.

l'atomo A e questo ci autorizza a parlare di diffrazione da « piani reticolari » quando in realtà sono gli atomi a diffrangere l'onda elettronica (*).

Pertanto, quando un fascio collimato di elettroni colpisce un cristallo orientato in maniera tale che un insieme di piani soddisfi le condizioni di Bragg, un pennello di elettroni lascia il cristallo ad un angolo 2θ rispetto al fascio incidente e dà luogo sullo schermo ad una propaghino nello spazio sottostante al campione, lungo le direttrici di un cono come illustrato in fig. 9.

Dato che gli insiemi di piani cristallografici che concorrono a dare la diffrazione sono in numero discreto (cfr. Appendice), sullo schermo o lastra fotografica posta sotto il campione ad una distanza L, apparirà un numero discreto di cerchi concentrici.

I raggi di questi cerchi sottenderanno

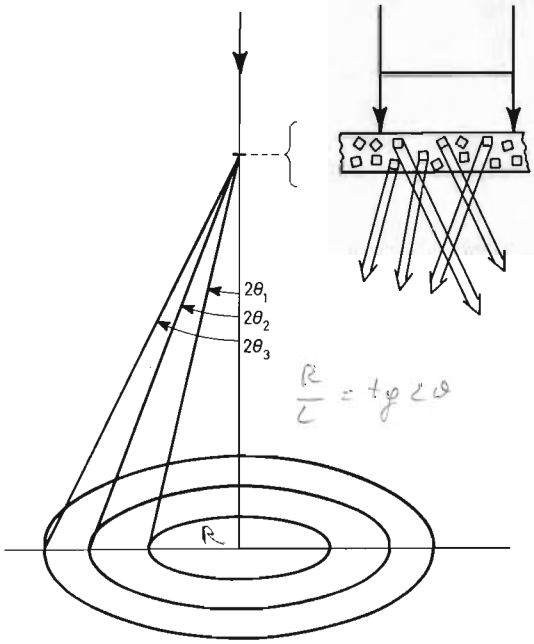


Fig. 9. – Origine della figura di diffrazione per materiali policristallini. L'inserto a destra rappresenta schematicamente il campione formato da tanti microcristalli disposti casualmente.

macchia di diffrazione.

Quando il campione è formato da un gran numero di piccoli cristalli disposti a caso, le molte diffrazioni che avvengono fanno sí che gli elettroni si il campione con angoli

$$2\theta = \text{arctg}\, R/L \tag{11}$$

corrispondenti alle varie distanze interplanari degli insiemi di piani che hanno concorso alla diffrazione.

1'1.2. Considerazioni quantitative. Le considerazioni quantitative che riportiamo in questa Sezione pos-

(*) In questa derivazione elementare della legge di Bragg si è trascurato l'effetto di rifrazione degli elettroni dovuto al potenziale interno medio del cristallo. Dato che questo è dell'ordine della decina di volt, l'approssimazione sarà tanto piú corretta quanto maggiore è la differenza di potenziale sotto la quale gli elettroni vengono accelerati prima di incidere sul cristallo.

sono essere considerate come un'ulteriore conferma delle ipotesi fatte.

Esprimeremo i risultati, di cui la fisica base è tutta contenuta nella (2), facendo ricorso alla notazione degli indici di Miller normalmente impiegata dai cristallografi. Un cenno essenziale sarà brevemente riepilogato nell'Appendice. Tuttavia, per la comprensione di quanto segue, rammentiamo che (hkl) rappresenta un insieme di piani reticolari paralleli distanti tra di loro d_{hkl}, mentre $\{hkl\}$ rappresenta tutti gli insiemi di piani paralleli equivalenti per simmetria, aventi quindi la stessa distanza interplanare d_{hkl}.

Con questa notazione la legge (2) di Bragg viene comunemente scritta

$$2d_{hkl}\sin\theta_{hkl}=\lambda\,. \tag{12}$$

Notiamo che nella (12) non compare l'ordine n di diffrazione in quanto esiste la convenzione che, anziché parlare di diffrazione di ordine n da parte dei piani (hkl), si parla di diffrazione del primo ordine dall'insieme fittizio di piani (nh, nk, nl).

Dato che gli angoli in gioco sono piccoli, per cui possiamo approssimare $\sin\theta\simeq\theta$ e $\operatorname{tg}2\theta\simeq2\theta$, abbiamo che

$$\lambda=2d_{hkl}\theta_{hkl}\,, \tag{13}$$

$$2\theta_{hkl}=R_{hkl}/L\,, \tag{14}$$

dove R_{hkl} rappresenta il raggio del cerchio di diffrazione prodotto dai piani $\{hkl\}$. R_{hkl} viene misurato direttamente sulla lastra fotografica PH mentre la lunghezza L della camera è una costante dello strumento usato. Combinando le (13), (14) si ottiene

$$\lambda L=d_{hkl}R_{hkl}\,. \tag{15}$$

Il cloruro di tallio cristallizza in un sistema spaziale coincidente con quello cubico. In tale sistema d_{hkl} è dato dalla formula

$$d_{hkl}=a/(h^2+k^2+l^2)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{16}$$

dove a è il lato della cella cubica unitaria. Sostituendo nella (15) si ricava

$$R_{hkl}=(h^2+k^2+l^2)^{\frac{1}{2}}\lambda L/a\,. \tag{17}$$

Pertanto ci si aspetterà, se la struttura del cloruro di tallio è effettivamente quella cubica, un diagramma di diffrazione formato da una serie di cerchi il cui raggio R_{hkl} deve crescere proporzionalmente a $(h^2+k^2+l^2)^{\frac{1}{2}}$. Se formiamo la tabella di tutti i possibili sistemi di piani ordinati in maniera che d_{hkl} risulti decrescente, i valori di R_{hkl} dovranno essere proporzionali alle quantità riportate nella seconda colonna della tabella I.

TABELLA I. – *Valori permessi dei sistemi di piani aventi indici di Miller $\{h\,k\,l\}$ per il reticolo cubico semplice.*

$\{h\ k\ l\}$	$\sqrt{h^2+k^2+l^2}$
1 0 0	1
1 1 0	$\sqrt{2}$
1 1 1	$\sqrt{3}$
2 0 0	2
2 1 0	$\sqrt{5}$
2 1 1	$\sqrt{6}$
2 2 0	$2\sqrt{2}$
2 2 1	3
3 0 0	
3 1 0	$\sqrt{10}$
3 1 1	$\sqrt{11}$
2 2 2	$2\sqrt{3}$
3 2 0	$\sqrt{13}$
3 2 1	$\sqrt{14}$

Il grafico di R_{hkl} contro $(h^2+k^2+l^2)^{\frac{1}{2}}$ dovrà essere una retta di pendenza $\lambda L/a$ che passa per l'origine.

Questo è quanto si verifica, come mostrato in fig. 10, e giustifica tutte le ipotesi fatte e cioè: i) che gli elettroni

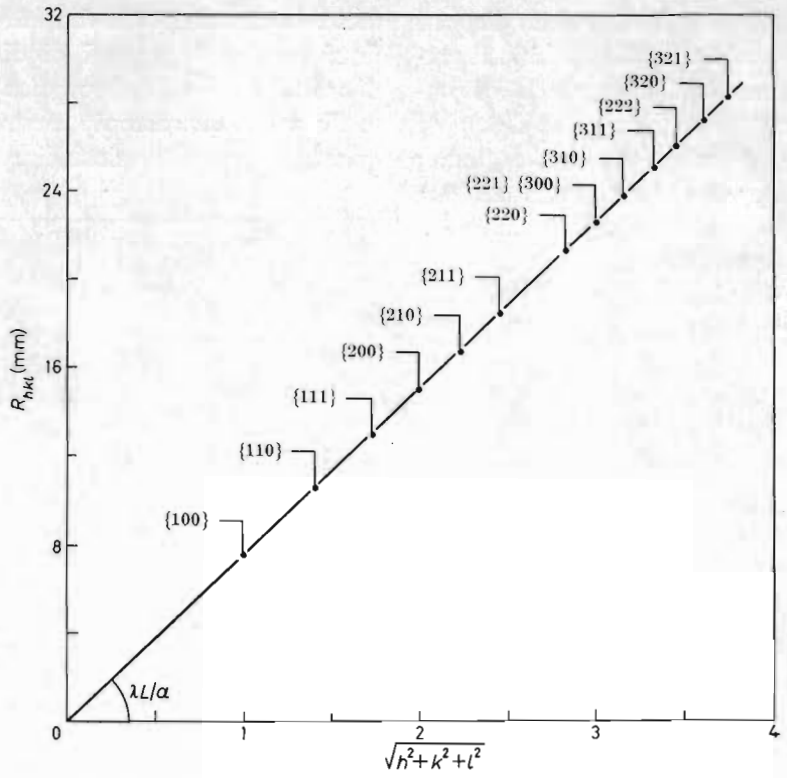


Fig. 10. – Diagramma che riporta i raggi degli anelli di diffrazione di fig. 6 (misurati in mm sulla lastra fotografica) in funzione di $h^2+k^2+l^2$ per un reticolo cristallino cubico semplice. La pendenza della retta che passa per i punti sperimentali e per l'origine vale $\lambda L/a$.

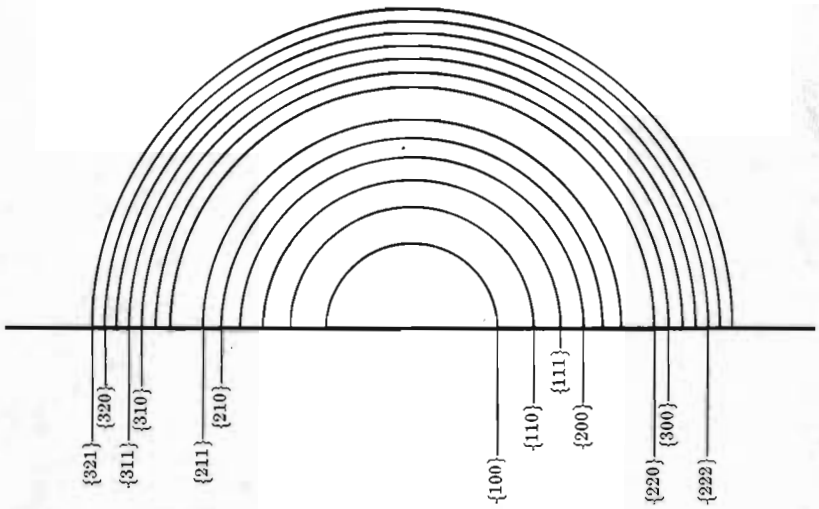


Fig. 11. – Identificazione dei primi tredici anelli di diffrazione del cloruro di tallio.

si comportano come onde, ii) che gli atomi del cloruro di tallio sono disposti in una struttura cristallina cubica. Il grafico ci consente di misurare la costante $\lambda L/a$ e pertanto, note due di queste quantità, è possibile ricavare la terza; ad esempio, visto che L è una costante dello strumento e che a può essere ottenuto da apposite tabelle, possiamo misurare la lunghezza d'onda λ associata agli elettroni con buona precisione.

Come mostra la fig. 11, questo procedimento ci permette di identificare i primi 13 anelli di diffrazione del cloruro di tallio. Dalla figura si può ancora una volta verificare come gli anelli di diffrazione (200) e (300) risultino ad una distanza rispettivamente doppia e tripla dal centro dell'anello (100). Ricordiamo che secondo le convenzioni fatte questi anelli non sono altro che gli spettri del II e del III ordine dovuti ai piani (100). Inoltre si noti come l'anello di diffrazione (221) coincida con il (300). Anche gli anelli (220) e (222) sono dovuti agli spettri del II ordine rispetto ai piani (110) e (111).

Quando analizziamo un materiale monocristallino il diagramma di diffrazione sarà costituito, per le considerazioni fatte in precedenza, da un insieme di macchie di diffrazione ciascuna delle quali sarà dovuta ad un ben preciso insieme di piani reticolari.

La fig. 12 mostra il diagramma di diffrazione ottenuto da un sottile campione di oro monocristallino avente i piani (001) perpendicolari al fascio elettronico. Dato che l'oro cristallizza nel reticolo cubico a facce centrate è possibile individuare quali insiemi di piani sono responsabili delle macchie di diffrazione presenti nel diagramma.

Il risultato del processo di identificazione è illustrato in fig. 13.

Gli esempi mostrati non devono trarre in inganno sulla facilità d'identificazione dei diagrammi di diffrazione di sostanze cristalline incognite mediante l'uso del microscopio elettronico in quanto la grande varietà di reticoli in

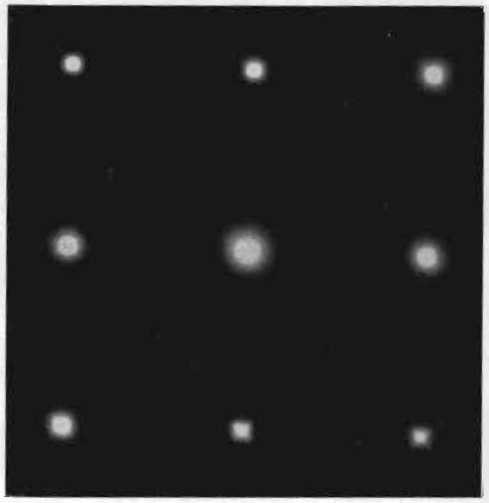


Fig. 12. – Diagramma di diffrazione di un sottile campione di oro monocristallino avente i piani (001) perpendicolari al fascio elettronico.

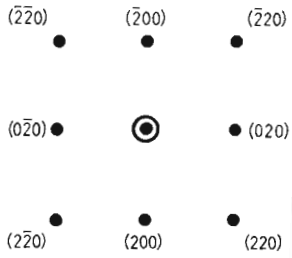


Fig. 13. – Identificazione delle macchie di diffrazione di fig. 12.

cui possono cristallizzare le varie sostanze dà luogo ad un'enorme quantità di figure di diffrazione (*).

(*) Esistono come è noto quattordici tipi di reticoli tridimensionali e 230 gruppi spaziali. Il reticolo cubico da noi preso in considerazione è quello piú semplice avendo gli elementi di simmetria eguali.

Ci preme tuttavia ribadire ancora una volta che l'aspetto fisico di tutto questo insieme di studi si basa sul comportamento ondulatorio degli elettroni nella loro interazione con la materia.

4'1.3. Misura della costante h di Planck. Una dimostrazione sperimentale della validità della relazione (1) di de Broglie può essere ottenuta verificando che il prodotto λp è costante (entro gli errori sperimentali) indipendentemente dalla tensione di accelerazione.

A tal fine si può sfruttare la caratteristica costruttiva di un microscopio elettronico che consente di lavorare a diversi valori della tensione di accelerazione. Nel nostro caso abbiamo usato tensioni di 50 kV, 75 kV, 100 kV, 125 kV, noti con la precisione dell'1%.

La fig. 14 mostra i diagrammi di diffrazione del cloruro di tallio ottenuti coi diversi potenziali. Per rendere piú evidente la variazione dei vari R_{hkl} con la tensione di accelerazione si sono riportati nei quattro quadranti *a*, *b*, *c*, *d* solo un quarto di ciascun diagramma di diffrazione.

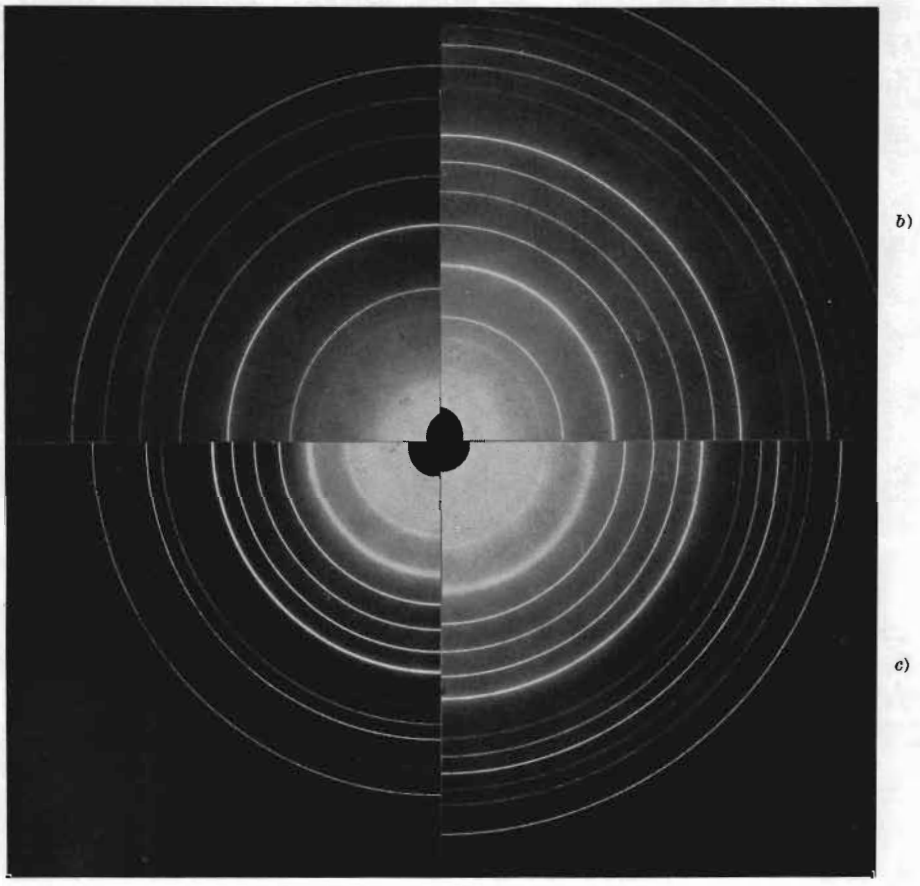


Fig. 14. – Diagrammi di diffrazione del cloruro di tallio ottenuti per quattro diversi valori del potenziale acceleratore: *a*) 50 kV, *b*) 75 kV, *c*) 100 kV, *d*) 125 kV.

Nella tabella II sono riassunti i ri-

TABELLA II. – *Misura della costante di Planck per diversi valori della tensione acceleratrice.*

V (10^3 V)	p (10^{-5} kg m/s)	λ (10^{-14} m)	h (10^{-34} J·s)
125.0±1.3	2023±10	326±3	6.6±0.1
100.0±1.0	1790± 9	369±4	6.6±0.1
75.0±0.8	1532± 7	431±4	6.6±0.1
50.0±0.5	1237± 6	533±5	6.6±0.1

sultati delle misure. Nella prima colonna è riportata la tensione di accelerazione nominale. Nella seconda colonna la quantità di moto p calcolata secondo la formula

$$p = (2emV^*)^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

dove V^* rappresenta il potenziale relativisticamente corretto dato dalla relazione

$$V^* = V\left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right) \tag{19}$$

con V tensione di accelerazione nominale, m_0 massa a riposo dell'elettrone, c velocità della luce.

Nella terza colonna è riportata la lunghezza d'onda calcolata dalle micrografie di fig. 14, secondo il criterio precedentemente illustrato, noti $a = 4.18$ Å e $L = (780 \pm 1)$ mm.

Nella quarta colonna è infine riportato il prodotto λp coi relativi errori. Appare chiaramente come i risultati coincidano, entro gli errori sperimentali, ed il valore piú probabile di h risulta $h = (6.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-34}$ joule·s, valore in accordo con quello ottenuto mediante altre tecniche.

4·2. *Diffrazione da un reticolo macroscopico.* – L'interpretazione dei risultati sperimentali di cui al paragrafo **4**·1 ci porta, come già detto, a formulare due ipotesi indipendenti, e cioè che gli atomi siano sistemati in una struttura regolare tridimensionale e che gli elettroni si comportino come onde.

Una volta ammessa la validità della prima ipotesi è possibile elaborare tutta una serie di argomenti che ci induce a ritenere valida la seconda ipotesi e viceversa.

Tuttavia, proprio a causa dell'impossibilità di sottoporre ad un *diretto* controllo sperimentale la validità della prima ipotesi, può rimanere nei lettori una notevole dose di scetticismo.

Non a caso una tale perplessità era espressa anche da von Laue che osservava: « uno scettico potrebbe pensare che gli atomi deflettono le particelle in un modo non ancora compreso » ([4]).

Per superare questo inconveniente si potrebbe costruire una struttura periodica macroscopica che agisse sugli elettroni come un reticolo ottico agisce su di un fascio di luce. I limiti che un tale esperimento presenta, se si effettua con elettroni trasmessi, sono legati al passo minimo d del reticolo che si è in grado di realizzare ed al suo spessore, che non deve assorbire gli elettroni incidenti.

Le moderne tecnologie ci mettono oggi a disposizione reticoli realizzati su pellicole di carbonio spessi poche centinaia di Å e di passo dell'ordine di mezzo micron.

La fig. 15*a*) mostra da un lato l'immagine di un tale reticolo, mentre la fig. 15*b*) mostra l'immagine di diffrazione con gli spettri dei vari ordini.

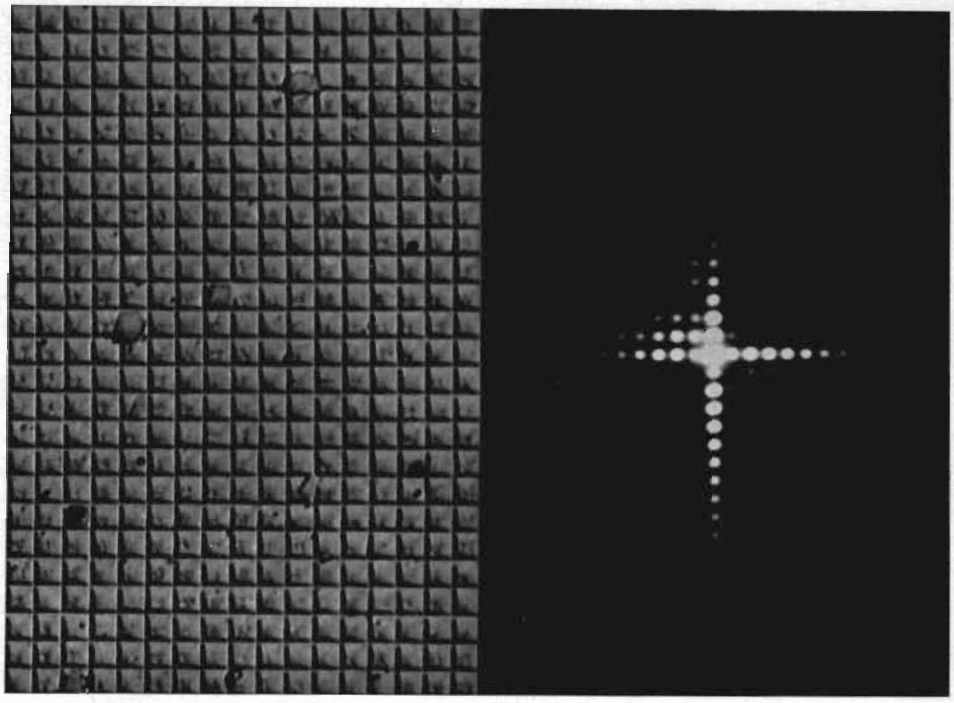
Per ottenere la figura di diffrazione di fig. 15*b*), se avessimo operato col microscopio nelle identiche condizioni di cui alle figure di diffrazione di fig. 6

([4]) M. VON LAUE: *Geschichte der Physik* (Frankfurt am Main, 1958), cap. 14.

e 12, non avremmo ottenuto alcun risultato positivo in quanto le macchie di diffrazione del reticolo macroscopico sono separate di un angolo 1000 volte piú piccolo di quello del reticolo cristallino.

È possibile tuttavia aumentare la lunghezza L della camera con questo accorgimento che è uno dei tanti [5] sullo schermo finale. Se eccitiamo i condensatori in modo da focheggiare su questo piano la figura di diffrazione, dato che questo piano dista dal campione 116 mm si ottiene una lunghezza della camera pari a 116×1250 mm $=$ $= 145$ m.

Il filamento a punta assicura la sufficiente coerenza della sorgente e per-



a) *b)*

Fig. 15. – *a)* Immagine di un reticolo di carbone avente due serie di incisioni perpendicolari tra di loro e di passo $d = 4630$ Å. *b)* Immagine di diffrazione del reticolo di cui alla foto *a)* ottenuta col metodo delle quattro lenti.

normalmente usati: si eccita il proiettore e la lente intermedia in modo da avere a fuoco sullo schermo finale il piano del diaframma situato fra la lente intermedia e l'obbiettivo. In queste condizioni il microscopio elettronico da noi usato (Siemens Elmiskop 101) ingrandisce di $(1250 \pm 5)\%$ volte questo piano tanto già con un modesto ingrandimento fotografico si ottiene il diagramma di diffrazione illustrato in fig. 15*b*).

Anche in questo caso è possibile verificare, in modo concettualmente migliore, la relazione (1) di de Broglie e calcolare la costante di Planck operando a diverse tensioni acceleratrici. Tuttavia la misura risulta meno accurata di quella esposta nel paragrafo 4·1.3 in quanto

[5] A. Armigliato, P. G. Merli e G Ruffini: *Journ. of Phys. E*, **6**, 35 (1973).

la lunghezza L della camera dipende, come visto, dall'eccitazione delle lenti intermedie e della lente proiettore e richiede, per essere nota con una sufficiente precisione, in ogni caso non migliore di un qualche percento, una taratura che può essere abbastanza laboriosa.

4·3. *Diffrazione di Fresnel da un bordo opaco.* – Le esperienze di cui ai paragrafi precedenti **4·1** e **4·2** possono essere considerate l'analogo delle esperienze di diffrazione di Fraunhofer in ottica.

È possibile realizzare in un microscopio elettronico anche esperienze di diffrazione di Fresnel, come mostrato per la prima volta da Boersch nel 1940.

Richiamiamo brevemente i fatti essenziali della diffrazione di Fresnel da un bordo opaco noti dall'ottica. Come mostrato in fig. 16, lo schema essenziale di questa esperienza è il seguente: la sorgente elettronica S illumina il piano PO. Uno schermo B a bordo netto intercetta il fascio. Se la sorgente S è sufficientemente piccola, il limite O dell'ombra geometrica è bordato da frange di diffrazione. Se B è opaco agli elettroni la ripartizione dell'intensità sul piano PO è quella mostrata nella fig. 17. Le ascisse dei massimi e dei minimi successivi,

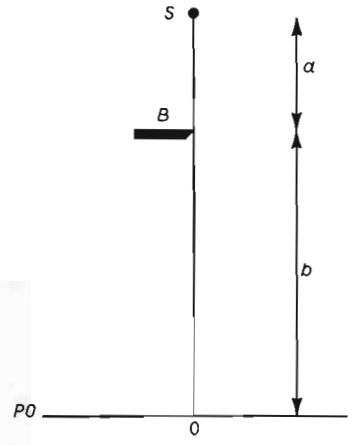


Fig. 16. – Schema della diffrazione di Fresnel da un bordo opaco: a = distanza fra sorgente S e bordo B, b = distanza fra bordo B e piano di osservazione PO.

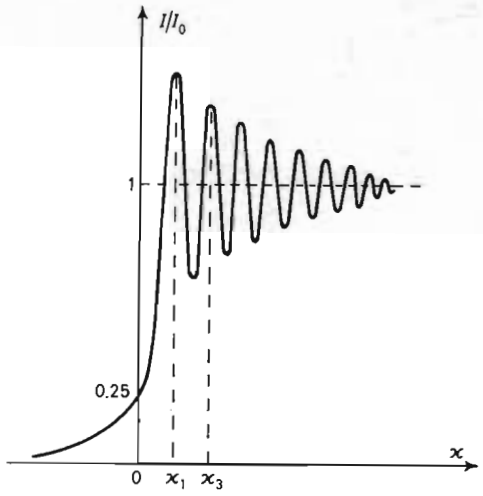


Fig. 17. – Andamento dell'intensità relativa I/I_0 attorno all'ombra geometrica O di un bordo opaco.

contate a partire dal limite O dell'ombra geometrica, sono dati, in prima approssimazione dalla relazione

$$(20) \qquad x_n = \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}} \cdot \sqrt{n - \frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned} &\text{mass } n = 1, 3, 5, \\ &\text{min } \quad n = 2, 4, 6, \end{aligned}$$

dove λ è la lunghezza d'onda ed a e b hanno il significato di cui alla fig. 16.

Questo ci permette di precisare quantitativamente quanto piccola debba essere la sorgente S per osservare le frange. Infatti, dal punto di vista geometrico, occorre che il diametro Φ della sorgente sia tale che la larghezza della zona di penombra geometrica corrispondente al bordo dello schermo sia piccola rispetto alla distanza dei due massimi o dei due minimi che si desidera separare.

Si può dimostrare che affinché risulti visibile la frangia di ordine n occorre che le dimensioni Φ della sorgente siano

$$(21) \qquad \Phi \ll 0.5 \cdot \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

La fig. 18 mostra l'immagine di diffrazione dovuta ad un bordo opaco po-

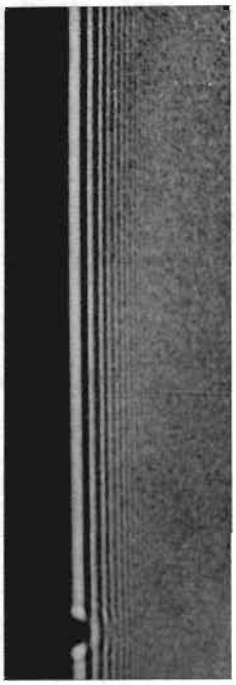


Fig. 18. – Immagine di diffrazione di un bordo opaco ottenuto al microscopio elettronico con elettroni accelerati sotto una d.d.p. di 100 kV.

sto a livello del preparato. La sorgente S è ottenuta rimpicciolendo, tramite i due condensatori C_1 e C_2 eccitati al massimo, le dimensioni della sorgente reale degli elettroni all'uscita dal cannone elettronico. La lente obbiettivo non è eccitata, mentre l'intermedia ed il proiettore portano a fuoco sullo schermo finale un piano PO non coincidente col piano del bordo opaco.

Per considerazioni quantitative il piano PO può essere portato a coincidere, ad esempio, col piano del diaframma della lente intermedia. Tramite questa disposizione sperimentale è quindi possibile verificare, anche quantitativamente, le previsioni della teoria e, noti i parametri geometrici, misurare per altra via la lunghezza d'onda λ associata agli elettroni.

Nella microscopia elettronica l'uso delle frange di diffrazione di Fresnel è di grande aiuto per valutare se il campione è a fuoco specie quando si osserva a forti ingrandimenti. Infatti la loro presenza attorno ad un bordo del preparato indica che si è messo a fuoco un piano diverso da quello che contiene il preparato stesso. Inoltre, se si osserva un foro e si sfocheggia leggermente con l'obbiettivo, la comparsa omogenea tutt'intorno al foro della frange di diffrazione di Fresnel indica assenza di astigmatismo nella lente obbiettivo.

5. Conclusioni.

In questa prima parte del presente lavoro abbiamo visto diverse esperienze di diffrazione con elettroni che confermano l'ipotesi del comportamento ondulatorio degli stessi. Si sono inoltre illustrati diversi metodi per misurare la lunghezza d'onda λ associata agli elettroni e si è verificato la validità della relazione di de Broglie giungendo ad una misura della costante h di Planck.

Nella seconda parte mostreremo come sia possibile realizzare con elettroni anche esperienze d'interferenza.

Queste ultime godono di una maggiore semplicità concettuale rispetto a quelle di diffrazione e la loro interpretazione richiede un apparato matematico piú semplice. Questo si riflette sul fatto che all'intuito fisico risulta piú

comprensibile un fenomeno d'interferenza che uno di diffrazione. Al riguardo si ricordi che già Padre Grimaldi aveva mostrato gli effetti di diffrazione della luce, ma furono considerati probanti dai fisici, ai fini dell'interpretazione dei fenomeni ottici in chiave di onde, solo gli esperimenti d'interferenza eseguiti da Fresnel circa un secolo dopo.

* * *

Si ringrazia il dr. A. Armigliato del C.N.R.-L.A.M.E.L. ed il sig. G. Matteucci dell'Istituto di Fisica di Bologna per la collaborazione fornita.

APPENDICE

Cenni di cristallografia.

Questa breve digressione sulla terminologia cristallografica non intende in alcun modo essere un'introduzione adeguata ad una teoria completa della diffrazione dei cristalli, ma si propone solamente di rendere piú comprensibile i risultati riportati nel paragrafo **4**'1 a quanti non abbiano mai incontrato in precedenza questo argomento.

Un cristallo è costituito da un motivo di atomi o molecole (nel caso piú semplice tale motivo è costituito da un solo atomo) che si riproduce periodicamente lungo tre direzioni nello spazio. L'insieme di tutte le traslazioni $\boldsymbol{R}$ che permettono la riproduzione del motivo si può scrivere nella forma

$$\text{(A.1)} \qquad \boldsymbol{R} = n_a \boldsymbol{a} + n_b \boldsymbol{b} + n_c \boldsymbol{c} \,,$$

dove n_a, n_b, n_c, sono tre numeri interi e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, sono tre vettori non coplanari. L'insieme nello spazio di tutti i punti o nodi definiti dalla (A.1) costituisce il reticolo cristallino.

Questo è mostrato nella fig. 1A che rappresenta la cella primitiva di un reticolo spaziale assieme ad alcuni nodi ottenuti per traslazione.

È naturale prendere i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ come base per un sistema di coordinate x, y, z.

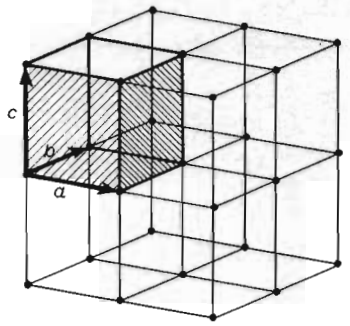


Fig. 1*A*. – Cella primitiva definita dai vettori a, b, c, con alcuni nodi del reticolo cristallino.

Gli angoli tra gli assi sono rispettivamente α, β, γ, come mostrato in fig. 2A, ed i moduli dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sono presi come unità di misura lungo i singoli assi.

Ogni piano che passa per tre nodi non allineati del reticolo (e quindi per infiniti nodi) viene chiamato piano reticolare. L'insieme di tutti i piani reticolari paralleli a questo forma un sistema di piani tale da contenere tutti i nodi del reticolo.

Un generico piano di questo insieme taglierà sugli assi le intercette OA, OB, OC (vedi fig. 2A).

Tali parametri, misurati in unità a, b, c, stanno tra di loro in rapporti esprimibili dalla relazione

$$\text{(A.2)} \qquad \frac{a}{OA} : \frac{b}{OB} : \frac{c}{OC} = h : k : l \,,$$

dove h, k, l, sono i tre numeri interi di valore piú piccolo che conservano inalterati i rapporti espressi dalla (A.2). Essi

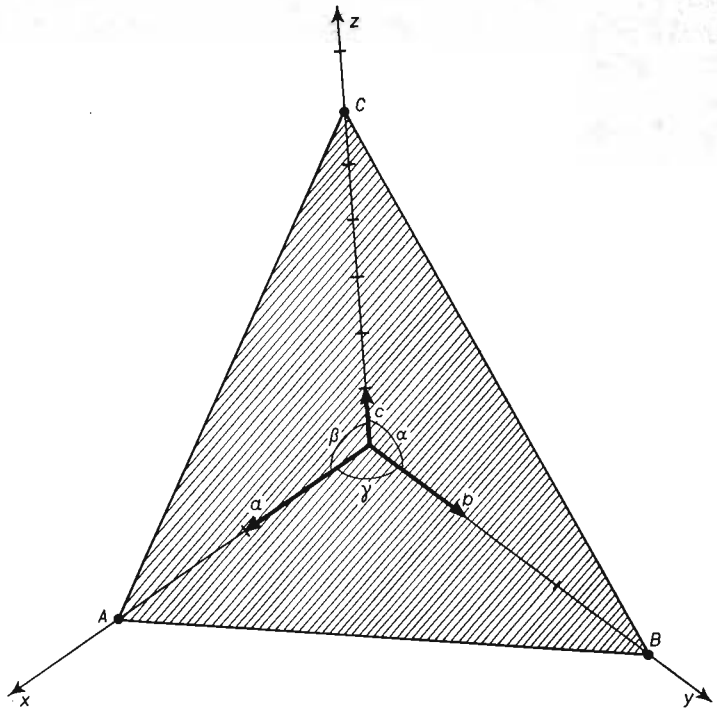


Fig. 2*A*. – Sistema di riferimento cristallografico. Il piano *ABC*, che taglia sulla terna di riferimento le intercette 2*a*, 3*b*, 6*c* ha indici di Miller (321).

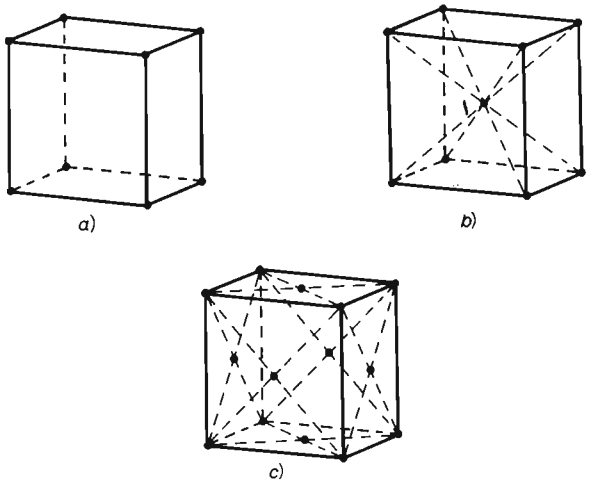


Fig. 3*A*. – Reticoli di Bravais appartenenti al sistema cubico: *a*) reticolo cubico semplice, *b*) reticolo cubico a corpo centrato, *c*) reticolo cubico a facce centrate. Per i reticoli *b*) e *c*) la cella mostrata non rappresenta la cella primitiva ma la cella unitaria convenzionale.

sono normalmente racchiusi tra parentesi tonde (*hkl*) e rappresentano il sistema di piani reticolari paralleli ad *ABC*. Gli indici (*hkl*) vengono chiamati indici di Miller.

A titolo di esempio consideriamo il piano della fig. 2A le cui intercette con gli assi sono rispettivamente $2a$, $3b$, $6c$. I rapporti per la (2) valgono 1/2:1/3:1/6 e gli indici di Miller del piano sono (321).

sistema appartengono il reticolo cubico semplice, quello cubico a corpo centrato e quello cubico a facce centrate. Per questi ultimi due reticoli la cella rappresentata in fig. 3A non è quella primitiva ma una cella unitaria convenzionale che meglio rappresenta gli elementi di simmetria del reticolo.

La fig. 4A rappresenta alcuni fra i piani piú importanti nel reticolo cubico

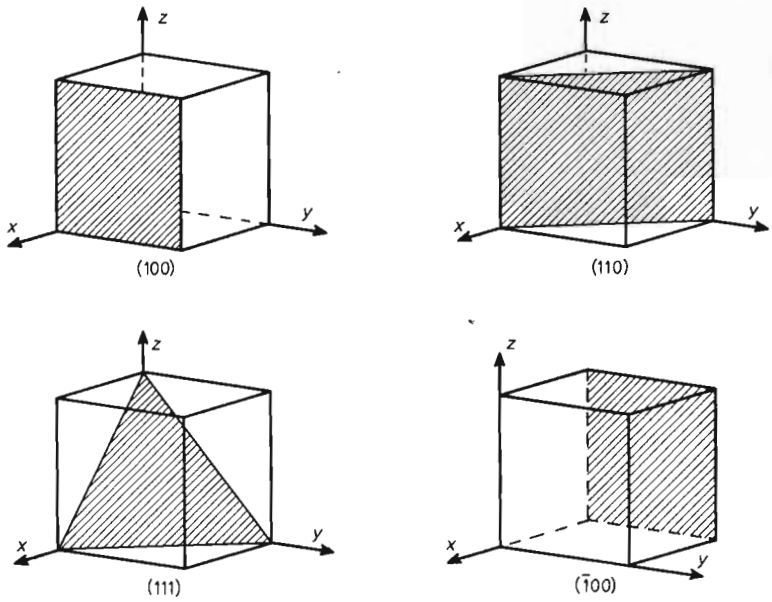


Fig. 4*A*. – Indici di Miller di alcuni importanti piani di un reticolo cubico.

Gli indici di Miller possono servire anche per caratterizzare un singolo piano. Se il piano taglia un asse dalla parte negativa, il corrispondente indice è negativo e viene indicato ponendo un segno meno al di sopra dell'indice stesso, ad esempio ($h\bar{k}l$).

Tutti i cristalli esistenti in natura possono essere assegnati a 14 diversi tipi di reticoli cristallini conosciuti col nome di reticoli di Bravais.

Essi sono ripartiti in 7 sistemi di cui il piú semplice è quello cubico in cui $a = b = c$ e $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. A questo

assieme alla loro notazione con gli indici di Miller.

Le facce del cubo in un cristallo cubico sono (100), (010), (001), ($\bar{1}$00), (0$\bar{1}$0), (00$\bar{1}$). Infatti, ogni qual volta il piano è parallelo ad un asse, l'intercetta è all'infinito ed il suo inverso vale zero.

Piani equivalenti per simmetria possono essere denotati ponendo fra parentesi graffe gli indici di Miller. Cosí, ad esempio, tutte le sei facce del cubo ed i piani ad esse paralleli vengono denotati con {100}.

Si può dimostrare come in un reti-

colo cubico a facce centrate diano luogo a diffrazione solo quegli insiemi di piani i cui indici (hkl) siano tutti dispari o tutti pari (cfr. fig. 13). In un reticolo cubico a corpo centrato danno luogo a diffrazione solo quegli insiemi di piani per i quali ($h+k+l$) risulta un numero dispari.

IN COPERTINA

Microscopio Elettronico Siemens 101 (Laboratorio LAMEL del CNR di Bologna) usato per gli esperimenti di diffrazione e d'interferenza di cui all'articolo a p. 163. A destra ed a sinistra dello strumento sono riportate tipiche figure di diffrazione e d'interferenza ottenute con elettroni accelerati con una d.d.p. di 100000 V (lunghezza d'onda associata $\lambda = 0.037$ Å). A destra dall'alto in basso: diffrazione da un reticolo policristallino di cloruro di tallio, diffrazione da un film monocristallino di oro in orientazione (100), diffrazione da un reticolo macroscopico di passo $a = 4630$ Å. A sinistra dall'alto in basso: diffrazione da un filo, figure d'interferenza ottenute con flussi crescenti di elettroni, frange d'interferenza.

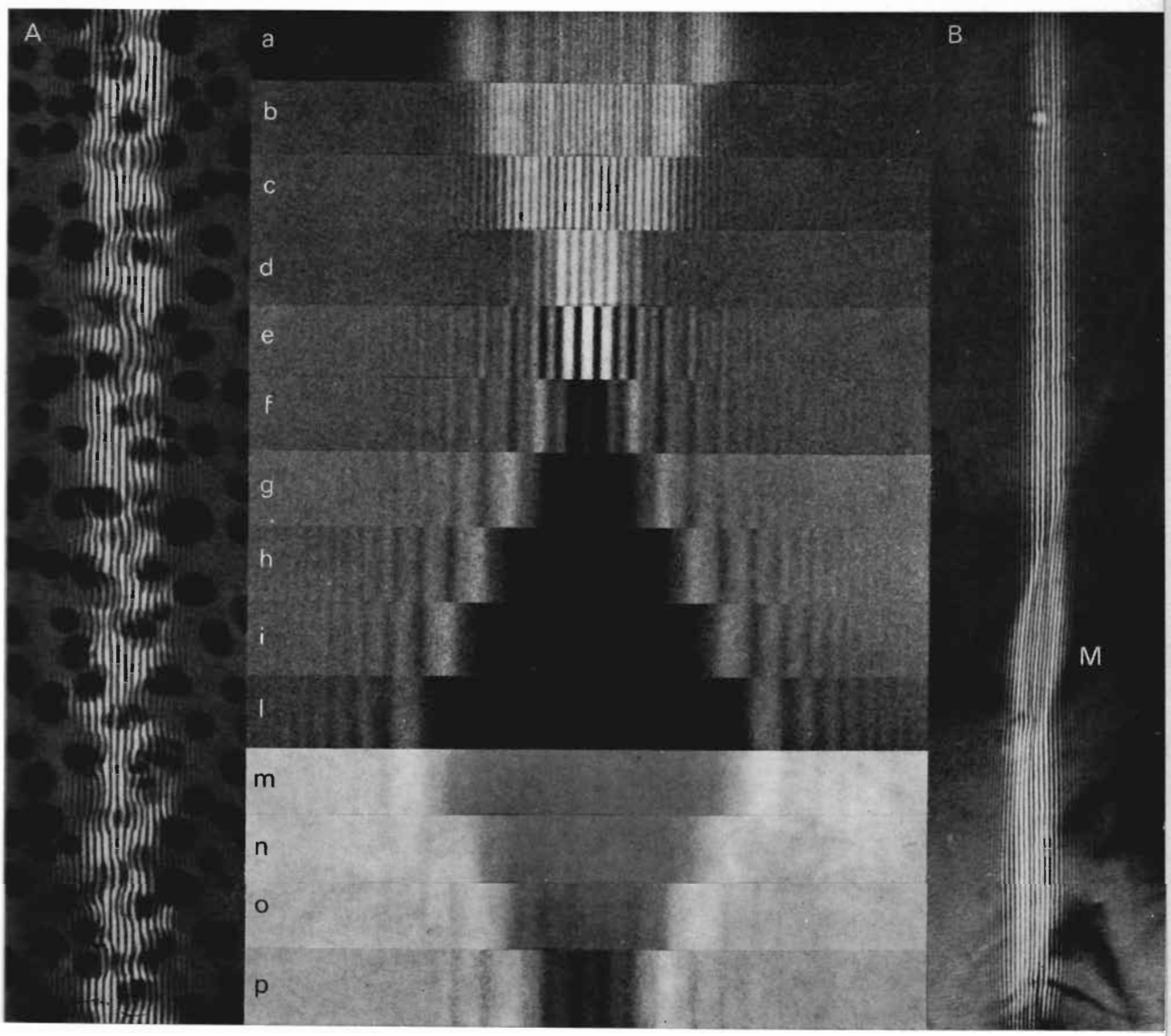


Foto al centro. Frange d'interferenza e di diffrazione ottenute al microscopio elettronico con elettroni accelerati a 100 kV (lunghezza d'onda associata $\lambda = 0.037$ Å) per diversi valori attribuiti al potenziale del filo dell'interferometro:

a) $V = +30$ V, *b*) $V = +25$ V, *c*) $V = +20$ V,
d) $V = +15$ V, *e*) $V = +10$ V, *f*) $V = +5$ V,
g) $V = 0$ V, *h*) $V = -5$ V, *i*) $V = -10$ V,
l) $V = -15$ V, *m*) $V = -15$ V, *n*) $V = -10$ V.
o) $V = -5$ V, *p*) $V = -0$ V,

Le foto *h*), *i*), *l*), ottenute con valori negativi del potenziale del filo corrispondono ad un biprisma elettronico divergente. Sono chiaramente visibili ai bordi della zona scura centrale frange di diffrazione.

Le foto *m*), *n*), *o*), *p*) sono le stesse delle foto *l*), *i*), *h*), *g*) ma sono state stampate col criterio di mettere in evidenza quanto appare nella zona di ombra geometrica. Risultano cosí visibili le deboli frange d'interferenza prodotte dalle onde diffratte dai bordi del filo.

Nelle foto laterali sono presentate due tipiche applicazioni della microscopia elettronica interferenziale.

A) Sistema di frange d'interferenza ottenuto inserendo sul percorso degli elettroni una pellicola che supporta nuclei monocristallini di argento. Considerando costante il potenziale interno dell'argento è possibile ottenere informazioni sulla terza dimensione dei cristalli (spessore) valutando il salto subíto dalle frange.

B) Sistema di frange modulato in *M* dalla presenza di una parete tra due domini magnetici in un campione di nichel monocristallino trasparente agli elettroni. A fuoco tale parete non è visibile nelle ordinarie condizioni di osservazione. (Vedi articolo di P. G. Merli, G. F. Missiroli e G. Pozzi a p. 83.)

Estratto dal *Giornale di Fisica* - Vol. XVII - N. 2 - Aprile-Giugno 1976

Diffrazione ed interferenza di elettroni. II. - Interferenza.

P. G. Merli
Laboratorio LAMEL-C.N.R. - Bologna
G. F. Missiroli
Istituto di Fisica dell'Università - Bologna
Gruppo Nazionale di Struttura della Materia del C.N.R. - Bologna
G. Pozzi
Laboratorio di Miscroscopia Elettronica dell'Istituto di Fisica dell'Università - Bologna
Gruppo Nazionale di Struttura della Materia del C.N.R. - Bologna

1. Introduzione.

Nella prima parte di questo lavoro [1] si è mostrato come sia possibile, utilizzando un moderno microscopio elettronico, realizzare una serie di esperienze di diffrazione con elettroni che ne mettano in evidenza il comportamento ondulatorio. Si è potuto inoltre verificare sperimentalmente la validità della relazione di de Broglie $\lambda = h/p$, che lega la lunghezza d'onda λ associata agli elettroni al loro impulso p tramite la costante di Planck h.

L'analogia esistente tra le esperienze di diffrazione con gli elettroni e quelle di diffrazione con la luce ha indotto molti ricercatori a verificare le stesse analogie negli esperimenti d'interferenza.

La loro descrizione, la realizzazione sperimentale di una di queste e l'interpretazione dei risultati ottenuti rappresenta l'oggetto di questa seconda parte del lavoro.

2. Considerazioni generali.

Come è noto [2], è possibile osservare fenomeni d'interferenza quando, tramite opportuni dispositivi, si divide la luce proveniente da una stessa sorgente in due o piú fasci che poi sono portati a sovrapporsi. In tale caso, nella regione di sovrapposizione, se i fasci sono coerenti, sarà possibile osservare una distribuzione d'intensità che varia da punto a punto tra massimi che superano la somma delle intensità dei singoli fasci e minimi che possono essere zero.

Due sono i metodi per ottenere due o piú fasci di luce coerente partendo da una stessa sorgente.

[1] G. Pozzi, G. F. Missiroli e P. G. Merli: *Giornale di Fisica*, **15**, 163 (1974).

[2] M. Born ed E. Wolf: *Principles of Optics* (New York, N.Y., 1959).

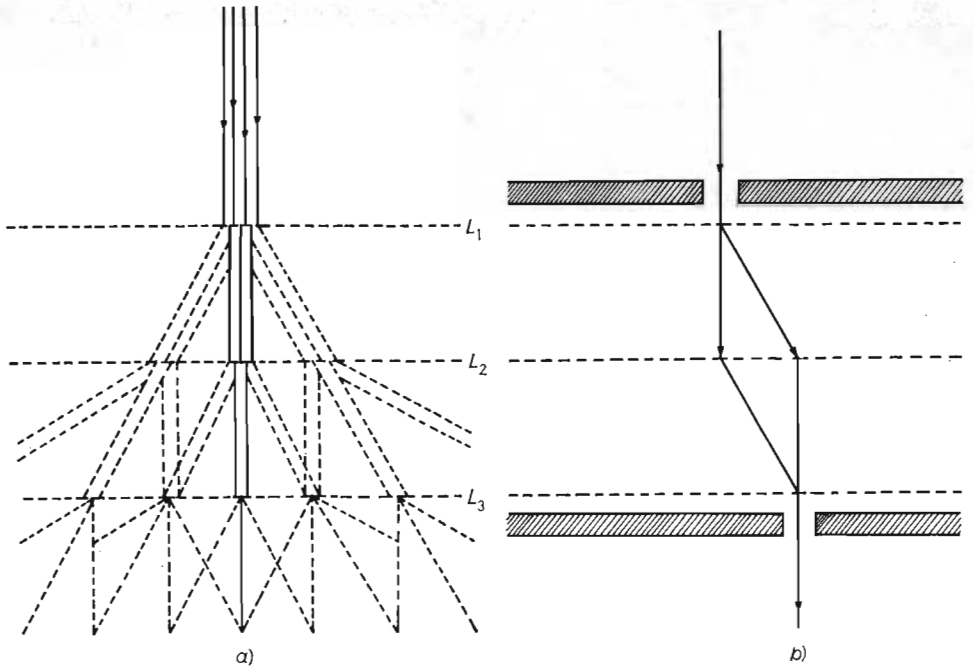


Fig. 1. – *a*) Rappresentazione schematica dei percorsi degli elettroni diffratti attraverso le tre pellicole monocristalline L_1, L_2, L_3, *b*) Selezione dei raggi elettronici tramite diaframmi.

Nel primo, porzioni del fronte d'onda primario sono usate o direttamente come sorgenti di onde secondarie (vedi esperimento dei fori di Young), oppure, tramite opportuni dispositivi ottici, per produrre sorgenti virtuali di onde secondarie (vedi esperienza degli specchi di Fresnel, della lente di Billet o del biprisma di Fresnel). Questo metodo, chiamato della *divisione del fronte d'onda*, richiede per il successo dell'esperienza sorgenti sufficientemente poco estese.

Alternativamente il fascio può essere diviso tramite una o piú superfici parzialmente riflettenti, ad ognuna delle quali la luce è in parte riflessa ed in parte trasmessa. Questo metodo è chiamato *divisione di ampiezza* e può essere usato anche con sorgenti spazialmente estese. In questo caso gli effetti possono avere maggiore intensità di quelli prodotti tramite la divisione del fronte d'onda.

Furono considerazioni legate a questioni d'intensità e di osservabilità del fenomeno che portarono Marton a proporre [3] ed a realizzare coi suoi collaboratori [4] un interferometro a divisione di ampiezza che storicamente rappresentò la prima esperienza d'interferenza eseguita con elettroni. La divisione di ampiezza era ottenuta sfruttando la diffrazione di Bragg degli elettroni attraverso una sottile pellicola monocristallina (vedi la prima parte di questo articolo). Con riferimento alla fig. 1 *a*) il fascio di elettroni incidente sulla pellicola monocristallina L_1 viene diviso in un certo numero di fasci diffratti coerenti. Ciascuno di questi viene a sua volta diffratto nell'attraversare altre pellicole quali L_2 ed L_3. Ponendo due diaframmi in modo opportuno si possono

[3] L. Marton: *Phys. Rev.*, **85**, 1057 (1952).
[4] L. Marton, J. A. Simpson e J. A. Suddeth: *Phys. Rev.*, **90**, 490 (1953).

isolare dalla moltitudine di tutti i fasci indicati in figura due soli fasci diffratti ed avere un cammino ottico come indicato in fig. 1 *b*).

Le traiettorie risultanti corrispondono grosso modo all'equivalente di un interferometro del tipo Mach-Zehnder (fig. 2), dove le pellicole L_1 ed L_3 fanno la funzione degli specchi semiriflettenti S_1 ed S_2, mentre la pellicola L_2 agisce come i due specchi totalmente riflettenti T_1 e T_2.

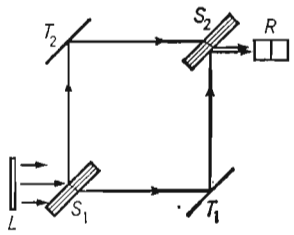


Fig. 2. – Schema di un interferometro di Mach-Zehnder: L sorgente spazialmente estesa; R rivelatore; S_1, S_2 specchi semiriflettenti; T_1, T_2 specchi totalmente riflettenti.

La simulazione ottica di un tale dispositivo (5) indicava che le tolleranze, dovute ad un imperfetto allineamento degli elementi dell'interferometro, erano nelle possibilità sperimentali per cui si passò alla realizzazione pratica dell'esperienza.

Nel dispositivo di Marton e collaboratori (4,6) le pellicole L_1, L_2 ed L_3 erano poste in una speciale camera portaoggetto di un microscopio elettronico che consentiva l'inclinazione e la rotazione reciproca delle singole pellicole; la distanza tra loro era di 35 mm. Gli autori dopo 1230 esposizioni di lastre, ognuna delle quali per tempi superiori ai 6 minuti, furono in grado di identificare definitivamente le frange di interferenza (6). Basta questo dato a sottolineare la difficoltà dell'esperienza che dopo di allora non fu piú ripetuta (*).

Marton fu condotto a scartare la realizzazione dell'esperienza di Young utilizzando un microscopio elettronico come banco elettroottico in quanto i calcoli relativi alla disposizione sperimentale che pensava di usare mostravano la necessità di avere fenditure di 200 Å di larghezza separate al piú da una distanza di 5000 Å. Inoltre, a parte il fatto che a quei tempi non era ancora stata sviluppata e perfezionata la tecnica di microincisione delle fenditure, la stabilità sia meccanica che elettronica dello strumento non era ancora adeguata alla realizzazione di questa esperienza.

Tutte queste difficoltà furono superate qualche anno dopo da Möllenstedt e Jönsson (7), che tramite una raffinata tecnica di elettroincisione riuscirono a costruire fenditure di larghezza di 0.6 μm e spaziatura di 2 μm. Gli autori montarono inoltre appositamente un banco elettroottico costituito da lenti cilindriche elettrostatiche che consentivano di rimpicciolire fino alle condizioni richieste dalle condizioni di coerenza una sorgente d'illuminazione lineare (fenditura) anziché puntiforme, con conseguente guadagno nell'intensità d'illuminazione della figura d'interferenza finale.

A proposito di questo lavoro riteniamo interessante riportare quanto scritto da A. P. French ed E. F. Taylor nell'editoriale del numero di gennaio del 1974

(5) J. A. Simpson: *Rev. Sci. Instr.*, **25**, 1105 (1954).

(6) L. Marton, J. A. Simpson e J. A. Suddeth: *Rev. Sci. Instr.*, **25**, 1099 (1954).

(*) Occorre tuttavia tenere presente che la realizzazione degli interferometri a divisione di ampiezza basati sull'utilizzazione della diffrazione di Bragg ha dato buoni risultati in esperimenti condotti sia con neutroni che con raggi X.

(7) G. Möllenstedt e C. Jönsson: *Zeits. Phys.*, **155**, 472 (1956).

dell'*American Journal of Physics* in cui è riportata una traduzione condensata dell'articolo originale di C. Jönsson ([8]).

Tutti i grandi esperimenti sono realizzati alle «frontiere della tecnologia», vale a dire al limite delle possibilità degli apparati sperimentali. Il pioniere, che prima di ogni altro si sforza di ottenere risultati decisivi, non può spesso permettersi il lusso di cercare nell'esperimento la semplicità concettuale.... Col passare del tempo il progresso tecnologico può permettere non solo una maggiore accuratezza dei risultati, ma anche forme dell'esperimento concettualmente piú semplici....

L'esperienza d'interferenza da due fenditure eseguite con elettroni è un esperimento fondamentale che può essere usato per introdurre molti dei concetti e degli apparenti paradossi della fisica quantica. Per decenni è stato presentato come un esperimento concettuale le cui previsioni erano giustificate dalla loro relazione remota e per molti versi oscura con esperimenti reali in cui gli elettroni sono diffratti dai cristalli. Pochi trattati anche moderni mostrano di essere a conoscenza che l'esperimento è stato realizzato e che i risultati sono in accordo con le previsioni della fisica quantica in tutti i suoi dettagli.... Al di là delle difficoltà tecniche, tuttavia, rimane la semplicità concettuale di un esperimento fondamentale, reale, pedagogicamente pulito, la cui descrizione e studio può ora arricchire e semplificare l'apprendimento della fisica quantica ....

Le difficoltà sperimentali riscontrabili nell'esperimento delle due fenditure vengono parzialmente superate utilizzando un interferometro a divisione del fronte d'onda che rappresenta l'analogo elettronico del biprisma di Fresnel ([9]).

Dato che è a questa esperienza che ci riferiamo nel sèguito, daremo non solo il principio di funzionamento dello stesso ma anche indicazioni utili per la realizzazione pratica dell'interferometro e sulle condizioni elettroottiche di osservazione.

In Appendice I vengono illustrati i dettagli costruttivi relativi alla realizzazione di due diverse versioni sperimentali dell'interferometro di Möllenstedt e Düker.

Il primo dispositivo presenta minori difficoltà meccaniche e si presta molto bene per esperimenti di carattere didattico. Il secondo dispositivo presenta invece una realizzazione meccanica piú difficile compensata da una maggiore flessibilità d'impiego, per cui può essere considerato come un valido accessorio che permette di trasformare un normale microscopio elettronico in un microscopio elettronico interferenziale ([10]).

3. Il biprisma elettronico: principio di funzionamento.

Se ad un sottile filo conduttore investito da un fascio di elettroni viene applicato un potenziale positivo, gli elettroni che passano accanto al filo sono attratti e deflettono dalla loro traiettoria rettilinea (fig. 3 *a*)). Questo dispositivo gode della proprietà di deflettere gli elettroni, che passano dalla stessa parte del filo, di un angolo α proporzionale al potenziale applicato e, in prima approssimazione, indipendente dalla distanza della traiettoria elettronica dal filo.

Inoltre, nell'approssimazione di angoli piccoli delle traiettorie rispetto ad una di riferimento (approssimazione parassiale) il dispositivo conserva lo stigmatismo, cosicché traiettorie di elettroni

([8]) C. Jönsson: *Amer. Journ. Phys.*, **42**, 4 (1974).
([9]) G. Möllenstedt e H. Düker: *Zeits. Phys.*, **145**, 377 (1956).
([10]) P. G. Merli, G. F. Missiroli e G. Pozzi: *J. Phys. E*, **7**, 729 (1974).

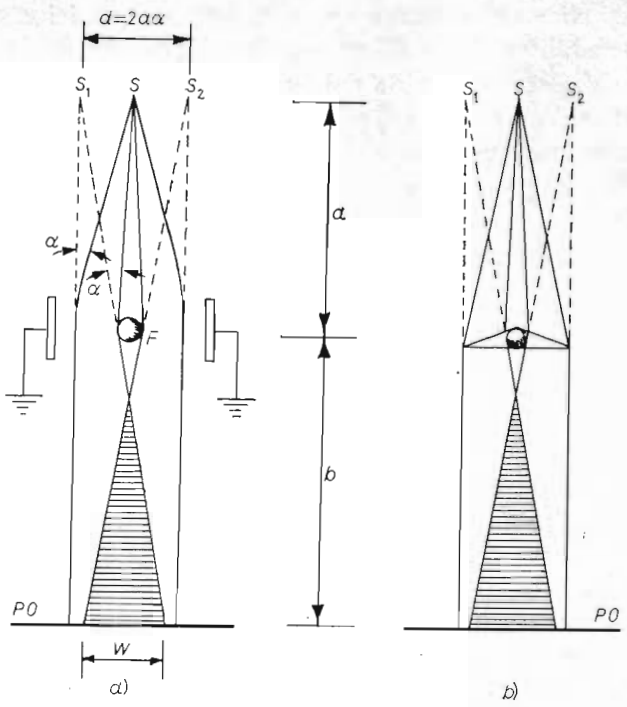


Fig. 3. – *a*) Biprisma elettronico convergente. *b*) Biprisma ottico convergente. S sorgente di elettroni; S_1, S_2 sorgenti virtuali distanti tra di loro d; α angolo di deflessione degli elettroni quando al filo F è attribuito un potenziale positivo; F filo dell'interferometro; a distanza fra sorgente S e filo F; b distanza fra filo F e piano ove si formano le frange PO; W larghezza della zona di sovrapposizione sul piano PO.

provenienti da una sorgente puntiforme S sembrano provenire da un'altra sorgente spostata lateralmente di una quantità $d/2 = a\alpha$ (fig. 3 *a*)).

Gli elettroni che passano dalla parte opposta del filo si comportano in maniera simmetrica; pertanto per un osservatore posto nella regione sotto il filo gli elettroni sembreranno provenire da due sorgenti puntiformi distinte S_1 e S_2 separate tra di loro di una quantità $d = 2a\alpha$. Questo dispositivo è l'analogo elettroottico del biprisma di Fresnel come mostrato nella fig. 3 *b*). Nel parallelo ottico la parte centrale del biprisma è stata schermata per simulare l'effetto dell'ombra dovuta al filo nel caso dell'esperimento con elettroni.

Ci si attenderà perciò che, in analogia con quanto succede con la luce, sul piano PO entro la regione di sovrapposizione W appaiano frange d'interferenza con periodicità X pari a

$$X = \lambda(a + b)/d \tag{1}$$

con λ = lunghezza d'onda di de Broglie, $d = 2a\alpha$ = distanza fra le sorgenti virtuali S_1 e S_2, a = distanza fra biprisma e sorgente, b = distanza fra biprisma e piano di osservazione PO.

Nell'àmbito di questi esperimenti gli elettroni emessi dal filamento ed accelerati entro il microscopio elettronico possono essere considerati monoenergetici, per cui possiamo considerare la visibilità delle frange come definita dalle sole condizioni di coerenza geometrica, la quale impone restrizioni alle dimensioni finite della sorgente.

Una regola pratica per ottenere un buon contrasto stabilisce che la dimensione angolare della sorgente vista dal filo risulti almeno di un quarto ([11]) minore della dimensione angolare della periodicità delle frange sempre vista dallo stesso filo.

Risulta pertanto che deve essere

$$s \leqslant a \cdot X/(4b) \tag{2}$$

con s dimensioni lineari della sorgente trasversalmente alle frange.

Da considerazioni geometriche risulta inoltre che, affinché esista una zona di sovrapposizione, deve essere

$$d > d_{\min} = \varphi \cdot (a + b)/b \tag{3}$$

con φ = diametro del filo dell'interferometro. Questo si riflette sulla massima periodicità $X_{\max}$ delle frange che risulta

$$X_{\max} = \lambda \cdot b/\varphi \,. \tag{4}$$

Combinando la (2) con la (4) si trova, quale condizione necessaria per la visibilità delle frange d'interferenza,

$$s < \lambda \cdot a/(4\varphi) \,. \tag{5}$$

Negli esperimenti che verranno successivamente illustrati la tensione di accelerazione degli elettroni, salvo eventuale precisazione in proposito, è stata mantenuta costante a 100 kV cui corrisponde una lunghezza d'onda associata $\lambda = 0.037$ Å.

Il valore di a può essere valutato, con buona approssimazione, di circa 10 cm. Pertanto per entrambi i dispositivi interferometrici sperimentali presi in considerazione, se si opera con un filo dell'interferometro il cui diametro φ assume valori compresi fra 0.3 μm e 1 μm, dalla (5) si ricava immediatamente che le dimensioni della sorgente, nel caso piú sfavorevole, devono essere inferiori a 1000 Å ed in quello piú favorevole a 3000 Å.

Sorgenti di queste dimensioni o minori possono essere ottenute nel microscopio elettronico rimpicciolendo la sezione del fascio di elettroni che esce dal cannone elettronico tramite il sistema di lenti condensatrici formato dai due condensatori oppure da questi piú la lente obbiettivo.

4. Le esperienze d'interferenza.

4·1. *Schema del banco elettroottico.* – L'interferometro, cosí come descritto nell'Appendice, è stato inserito nel microscopio elettronico e lo schema a blocchi dell'intero apparato è illustrato in fig. 4.

La sorgente di elettroni S' è realizzata tramite un filamento a punta P che emette elettroni per effetto termoionico. Il potenziale acceleratore degli elettroni è di 100 kV.

Si è usato un filamento a punta e non un normale filamento perché questo presenta i seguenti vantaggi:

a) Gli elettroni sono emessi da una zona di minor diametro rispetto a quella di un filamento normale e quindi la coerenza è maggiore.

b) La brillanza di una tale sorgente è circa 10 volte superiore a quella di una sorgente normale e pertanto si può ridurre il tempo di esposizione per ottenere analoghi risultati.

Con L_1 si è schematizzato l'insieme delle lenti del microscopio che hanno la

([11]) M. Françon: *Handbuch der Physik*, Vol. **24** (Berlin, 1956), p. 185.

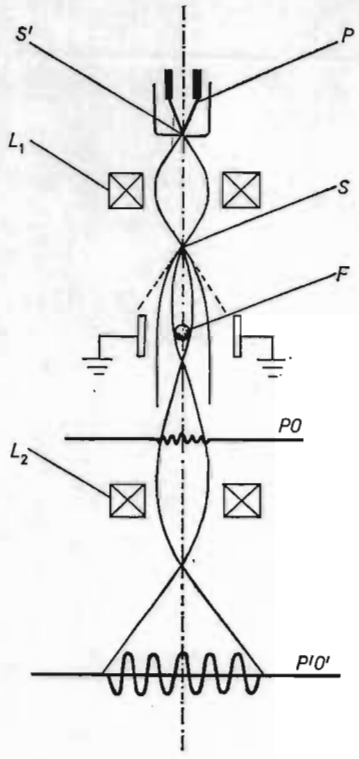


Fig. 4. – Schema a blocchi del microscopio elettronico per esperienze d'interferenza: P filamento a punta che emette elettroni per effetto termoionico; S' sorgente primaria degli elettroni all'uscita dal cannone elettronico; L_1 sistema di lenti condensatrici che provvede a ridurre la sorgente primaria S' nella sorgente S; F filo dell'interferometro; PO piano ove si formano le frange di interferenza; L_2 sistema di lenti che provvede ad ingrandire le frange che si formano sul piano PO nel piano finale di osservazione $P'O'$; $P'O'$ piano di osservazione o piano ove si trova la lastra fotografica.

funzione di ridurre la sorgente S' in una sorgente S di dimensioni minori. Nel nostro caso L_1 può essere formato dai due condensatori del microscopio piú eventualmente l'obbiettivo. Le dimensioni trasversali della sorgente S possono essere ridotte ad un valore minimo s di circa 60 Å.

Le frange d'interferenza si formano sul piano PO che è il piano oggetti del successivo sistema di lenti L_2 (formato dai due proiettori). Queste lenti provvedono a fornire un'immagine sufficientemente ingrandita del sistema di frange sul piano $P'O'$ dove può essere osservata ed eventualmente registrata tramite una lastra fotografica.

Causa l'esigua intensità d'illuminazione sullo schermo fluorescente finale non è possibile l'osservazione visuale a meno che non si disponga di un intensificatore di immagini. I tempi di esposizione sono usualmente dell'ordine del minuto.

4·2. *Risultati sperimentali.*

4·2.1. Biprisma convergente. Con la serie di foto riportate in fig. 5 s'illustra come variano le frange di interferenza per diversi valori del potenziale V applicato al filo F disposto a livello del diaframma della lente intermedia. Il diametro del filo era $\varphi = 0.4\,\mu m$. Le condizioni elettroottiche scelte sulla base dei dati di taratura del microscopio ([10]) erano tali che i parametri a e b valevano rispettivamente 10 e 24 cm. L'ingrandimento del piano PO sul piano di osservazione $P'O'$ era di $240\times$.

La fig. 5 *a*) mostra la sola immagine di diffrazione del filo F dell'interferometro quando lo stesso era mantenuto a potenziale zero.

L'analogia di questa figura di diffrazione con quella ottenuta nelle corrispondenti esperienze di ottica è evidente. È significativa la frangia centrale chiara che si forma in quella che dovrebbe essere la zona d'ombra geometrica del filo. Una tale frangia richiama alla memoria il paradosso di Poisson e la disputa con Fresnel ([12]) all'Accademia di Parigi nel 1818.

Le fig. 5 *b*), *c*), *d*), *e*) ecc. riportano

([12]) J. STRONG: *Concepts of Classical Optics* (San Francisco, Cal., and London, 1958), p. 186.

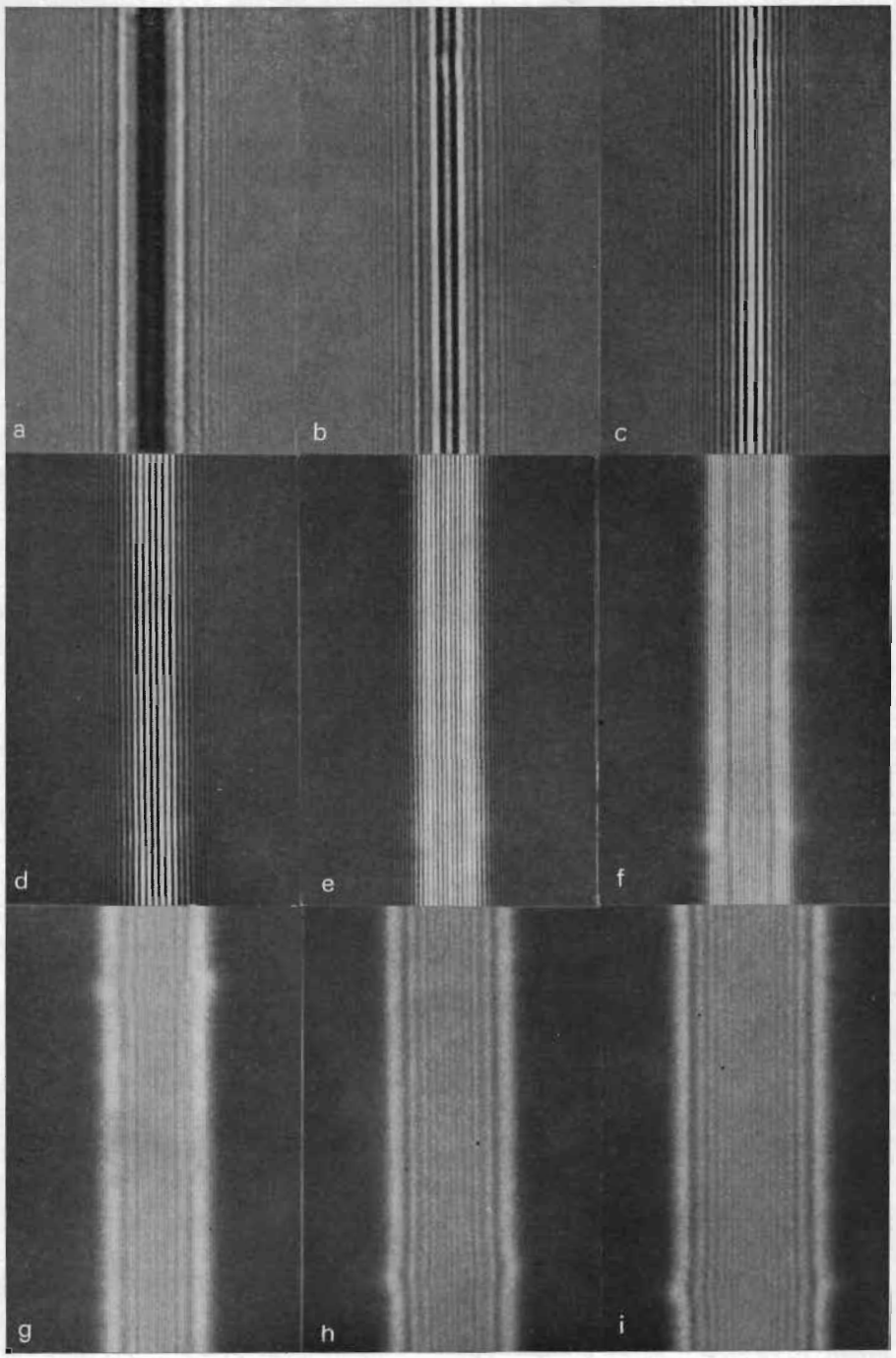


Fig. 5. – Frange di diffrazione e d'interferenza per diversi valori della tensione applicata al biprisma elettronico: *a*) $V = 0$ V; *b*) $V = 2$ V; *c*) $V = 4$ V; *d*) $V = 6$ V; *e*) $V = 8$ V; *f*) $V = 10$ V; *g*) $V = 12$ V; *h*) $V = 14$ V; *i*) $V = 16$ V.

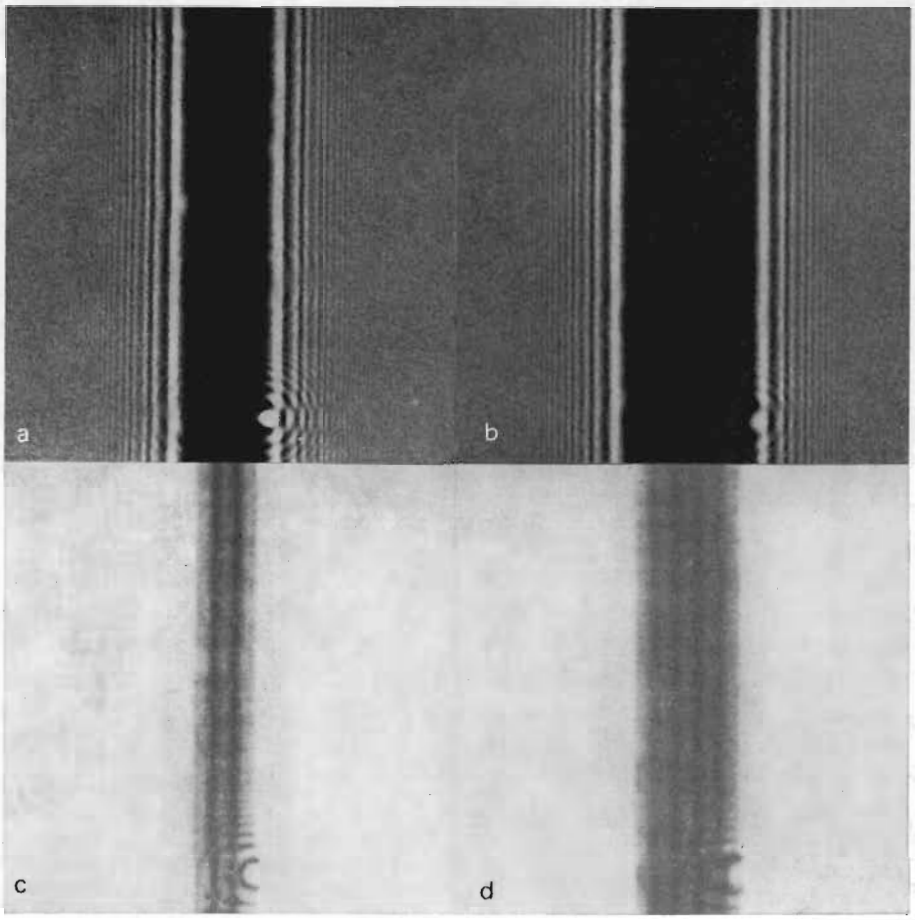


Fig. 6. – Allargamento dell'ombra geometrica del filo dell'interferometro per valori negativi della tensione applicata: *a*), *c*) $V = -4$ V; *b*), *d*) $V = -8$ V. Stesse condizioni elettroottiche della fig. 5. Le foto *c*) e *d*) mettono in evidenza le frange d'interferenza presenti entro la zona d'ombra geometrica del filo.

le frange d'interferenza quando al filo F è stato dato rispettivamente il potenziale di $+2$ V, $+4$ V, $+6$ V, $+8$ V, $+10$ V, ecc.

Nella fig. 5 *c*) il potenziale V applicato al filo è tale che $d \simeq d_{\min}$. La sovrapposizione dei fasci sul piano PO è dell'ordine di un'interfrangia per cui risulta difficile separare in questo caso le frange d'interferenza da quelle di diffrazione.

Nelle foto successive, ottenute per valori maggiori del potenziale, si ha il duplice effetto dell'aumento della zona di sovrapposizione e di diminuzione del passo delle frange per l'aumentata distanza fra le due sorgenti virtuali S_1 e S_2; pertanto le frange d'interferenza sono chiaramente distinguibili da quelle di diffrazione.

Anzi, per valori piú elevati del potenziale V, queste ultime modulano in intensità quelle d'interferenza come mostrato nella fig. 5.

Aumentando ancora il potenziale applicato si arriva alla condizione in cui le frange d'interferenza non sono piú risolvibili a causa delle dimensioni finite

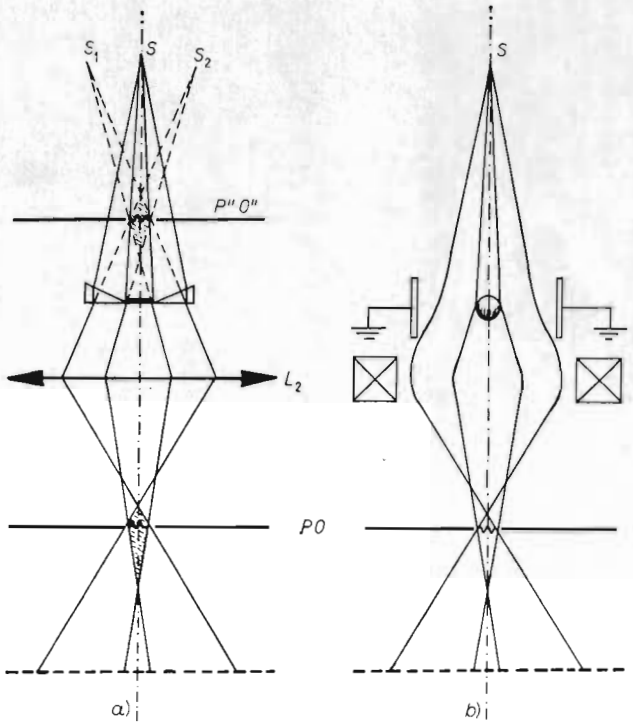


Fig. 7. – *a*) Biprisma ottico divergente. *b*) Biprisma elettronico divergente.

della sorgente e restano solo quelle di diffrazione.

L'analisi delle foto permette di confermare sperimentalmente che la distribuzione dell'intensità delle frange dovuta agli elettroni incidenti sulla lastra fotografica è dello stesso tipo di quella che si ottiene analizzando la distribuzione dell'intensità luminosa di un sistema di frange d'interferenza ottenute ad esempio con un biprisma di Fresnel ed un fascio di luce monocromatica proveniente da un laser.

Inoltre, mettendo a confronto le foto di fig. 5 è possibile verificare sperimentalmente che la distanza fra le sorgenti virtuali S_1 e S_2 aumenta linearmente, a parità di ogni altra condizione, all'aumentare del potenziale applicato al filo F, in quanto il numero delle frange per unità di lunghezza cresce linearmente col potenziale.

Di questo si può fare anche una verifica diretta eccitando la lente P_1 (primo proiettore) in modo tale da portare l'immagine delle due sorgenti virtuali sul piano finale di osservazione.

Dato che in queste condizioni l'ingrandimento totale delle lenti P_1 e P_2 è di $330\times$ ([10]) è possibile determinare direttamente la distanza d fra le sorgenti virtuali. Come nel caso della luce è possibile risalire da questi dati ad una misura di λ.

4·2.2. Biprisma divergente. Se anziché applicare al filo un potenziale positivo se ne applica uno negativo, gli elettroni divergeranno e sul piano di osservazione $P'O'$ si noterà un allargamento dell'ombra geometrica del filo. Se sono verificate le condizioni di coe-

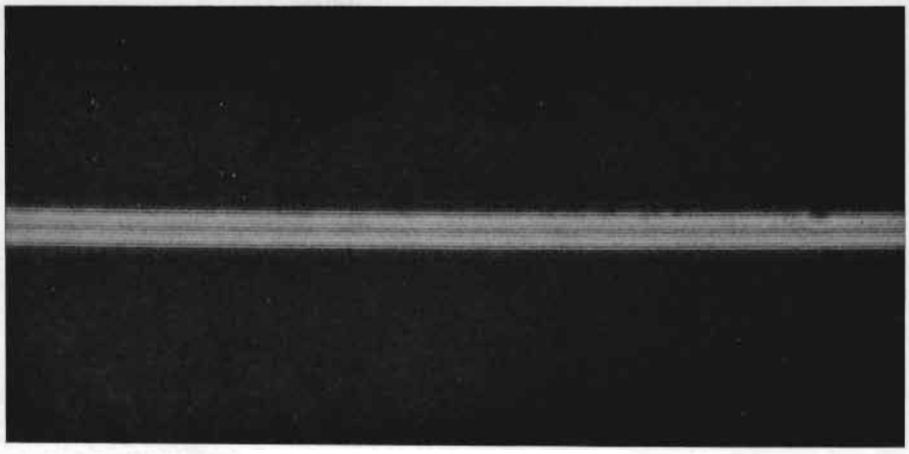


Fig. 8. – Frange d'interferenza nel caso di un biprisma elettronico divergente.

renza, ai bordi del filo si noteranno ben evidenziate le frange di diffrazione (fig. 6 *a*), *b*)).

Anzi, sviluppando opportunamente la lastra, cercando di evidenziare bene la parte interna all'ombra del filo, si possono notare, nella regione di ombra geometrica, delle frange molto deboli dovute all'interferenza delle onde diffratte da ciascun bordo del filo (fig. 6 *c*), *d*)).

Nell'analogia ottica precedentemente delineata questo caso corrisponde ad un biprisma di Fresnel divergente. Frange dovute all'interferenza degli elettroni provenienti dalle sorgenti virtuali S_1 e S_2 possono ancora essere osservate se, come nel caso ottico (fig. 7 *a*)), si fa uso di una lente L_2 che abbia come piano coniugato del piano PO un piano $P''O''$ che si trovi nella zona di sovrapposizione dei prolungamenti virtuali dei raggi. Eccitando la lente proiettrice P_1 del microscopio ci si può porre in queste condizioni ed osservare sul piano $P'O'$ un sistema di frange.

La fig. 8 illustra frange d'interferenza realizzate con questa disposizione quando il filo F dell'interferometro era a potenziale di – 9 V e la lente proiettore eccitata con una corrente di 81 mA ([10]).

5. Interpretazione dei risultati sperimentali.

L'insieme delle esperienze presentate in questo articolo ed in quello precedente ci confermano che, nelle condizioni sperimentali da noi usate, il comportamento di un elettrone va assimilato a quello di un'onda.

D'altra parte affrontando i fenomeni relativi al passaggio dell'elettricità in un elettrolita oppure studiando il principio di funzionamento di un normale tubo a raggi catodici, od ancora rivelando con un contatore Geiger-Müller gli elettroni emessi da una sorgente radioattiva, siamo in grado di raccogliere altrettanti dati sperimentali che ci confermano nell'idea che l'elettrone si comporti come una particella, ossia come un « grumo di materia » ben localizzato nello spazio.

Abbiamo quindi un comportamento duale dell'elettrone la cui comprensione sfugge agli schemi interpretativi classici, anche se non si può ravvisare in tale comportamento alcuna contraddizione logica, dal momento che aspetti corpu-

scolari ed ondulatori si manifestano in condizioni sperimentali diverse e mai contemporaneamente.

Per uscire da questo dualismo sottoponiamo ad analisi critica i dati sperimentali che sono in nostro possesso.

5'1. *Significato dell'onda associata all'elettrone.* – Ritorniamo all'esperimento d'interferenza e vediamo qual'è l'interpretazione che possiamo dare ai risultati ottenuti.

Una prima ipotesi può essere la seguente: « la comparsa del fenomeno ondulatorio è legata ad un'interazione degli elettroni fra di loro ».

Alcune considerazioni numeriche riportate nell'Appendice II permettono di affermare che nelle condizioni sperimentali di cui alle foto d'interferenza mostrate, gli elettroni sono separati « in media » fra loro da una distanza dell'ordine della decina di metri per cui passano nel dispositivo interferometrico uno alla volta. Questo a meno che non si supponga che siano emessi a gruppi di due o piú per volta.

Quest'ultima ipotesi non appare giustificata dalle nostre conoscenze sui meccanismi di emissione degli elettroni e non ha trovato a tutt'oggi alcun riscontro nei risultati sperimentali. Misure eseguite con strumenti in grado di rivelare non solo l'arrivo di una particella carica, ma capaci di ricavare anche, conoscendo ad esempio l'energia della particella, la sua massa, escludono che si verifichi sistematicamente una tale ipotesi.

Si può quindi concludere che il fenomeno dell'interferenza è conseguenza solo dell'interazione dell'elettrone singolo con l'apparato sperimentale.

A questo punto, per interpretare le frange d'interferenza possiamo pensare che si verifichi l'una o l'altra di queste due condizioni:

a) l'elettrone cessa di essere una particella e si distribuisce con continuità nello spazio in modo analogo ad una onda;

b) l'elettrone è una particella che arriva in un punto ben definito dello schermo impressionando un singolo grano dell'emulsione fotografica e la figura d'interferenza è il risultato statistico dell'arrivo di un gran numero di elettroni.

Operando con flussi decrescenti di elettroni ed osservando l'evoluzione del fenomeno dell'interferenza nel tempo possiamo dare una risposta a queste domande.

Lo strumento che ci permette di seguire nel tempo la formazione delle frange d'interferenza con bassissimi flussi di elettroni può essere un intensificatore d'immagini, collegato ad un tubo televisivo per la ripresa esterna, ed inserito nel microscopio elettronico al posto della lastra fotografica. Il principio di funzionamento di questo dispositivo è il seguente: uno schermo di trasmissione, inserito a livello del normale schermo fluorescente, provvede a convertire l'immagine elettronica in una immagine luminosa che, tramite un accoppiamento costituito da fibre ottiche, illumina il fotocatodo dell'intensificatore d'immagini.

Qui l'immagine ottica viene riconvertita di nuovo in un'immagine elettronica con un processo di amplificazione tale che l'immagine che si produce ha una brillanza 200 volte maggiore di quella che si osserverebbe sullo schermo fluorescente del microscopio. In questo secondo processo la carica elettrostatica può essere immagazzinata per molti minuti ed i segnali possono cosí essere

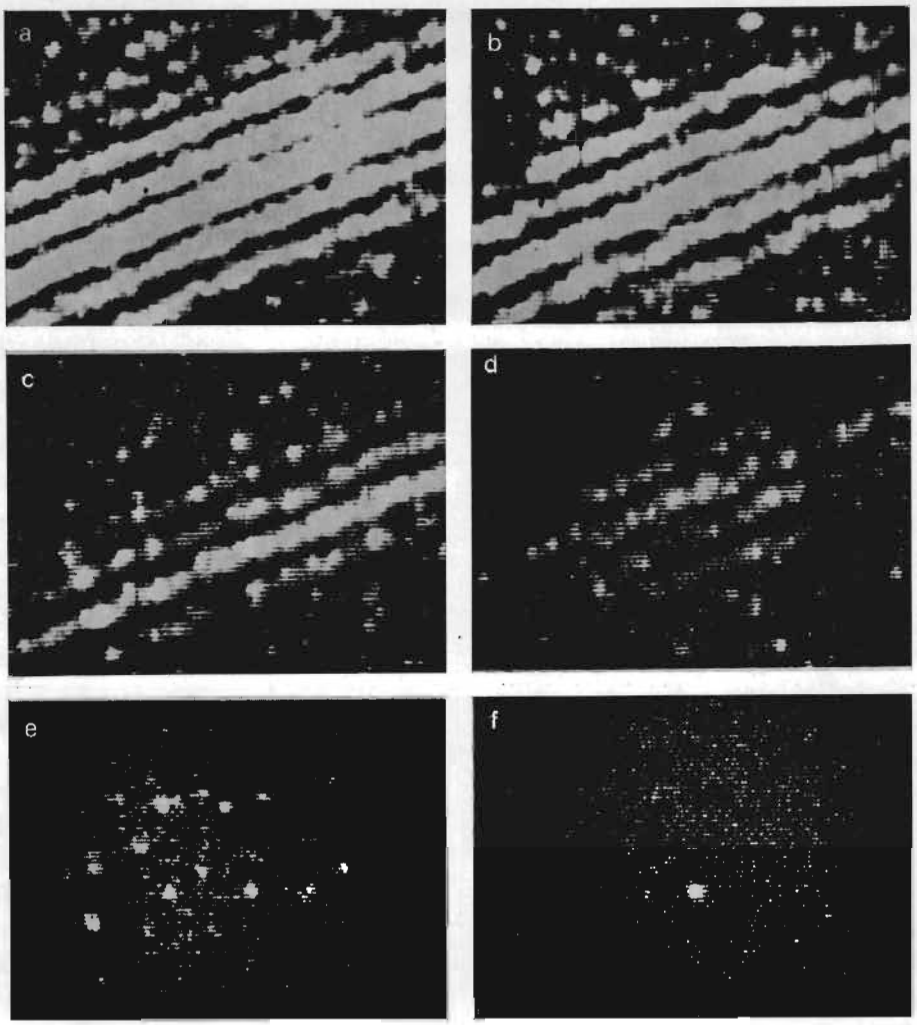


Fig. 9. – Frange d'interferenza per valori decrescenti della corrente del fascio (da *a*) ad *f*)).

integrati nel tempo su intervalli che vanno da un minimo di 0.04 s ad un massimo di diversi minuti. Un successivo sistema di fibre ottiche provvede all'accoppiamento col tubo televisivo il quale a sua volta è collegato, tramite un amplificatore ed un'unità di controllo, al monitor.

Le prestazioni ed i dettagli costruttivi di un tale dispositivo qui sommariamente descritto possono essere dedotti dalla letteratura ([13]); a noi preme sottolineare che per suo tramite è possibile osservare direttamente sullo schermo televisivo tutti i fenomeni descritti in precedenza seguendoli anche nel loro divenire dinamico, quando, ad esempio si varia con continuità il potenziale applicato al filo dell'interferometro.

I risultati dell'esperienza con bassi flussi d'elettroni sono riportati nella serie di foto di fig. 9. Esse sono state ottenute nel modo seguente.

Fissate le condizioni elettroottiche

([13]) K. H. HERRMANN, D. KRAHL, A. KÜBLER, K. H. MÜLLER e U. RINDFLEISCH: *Electron Microscopy in Material Science*, edited by U. VALDRÉ (New York, N.Y., and London, 1971), p. 252.

che danno le varie frange d'interferenza come nella fig. 9 *a*) e fissato il tempo di integrazione dell'intensificatore d'immagini in 0.04 s, si è via via diminuita l'intensità di corrente del fascio elettronico.

L'evoluzione del fenomeno è stata quindi filmata dallo schermo televisivo (*). Le foto 9 *b*), *c*), *d*), *e*), *f*) sono le riproduzioni dei fotogrammi del film relativi ad intensità di corrente del fascio decrescente. Si può notare che le frange dapprima diventano discontinue fino a scomparire (fig. 9 *b*), *c*), *d*)).

Per valori piú bassi della corrente compaiono solo i segnali corrispondenti all'arrivo di alcuni elettroni distribuiti in una qualsiasi delle posizioni precedentemente occupate dalle frange d'interferenza (fig. 9 *e*)).

Per valori ancora piú bassi dell'intensità di corrente si hanno solo fotogrammi in cui compaiono « uno o due elettroni » (fig. 9 *g*)) (il segnale dell'elettrone corrisponde alla macchia chiara di maggiori dimensioni; i piccoli puntini distribuiti su linee parallele sono dovuti alla presenza del « raster » televisivo che ha impressionato il fotogramma).

Le frange d'interferenza (ed anche quelle di diffrazione) non sono pertanto dovute al fatto che l'elettrone si distribuisce con continuità nello spazio e diventa un'onda (infatti in questo caso avremmo dovuto avere delle frange d'intensità decrescente al decrescere dell'intensità della corrente). L'elettrone si manifesta come una particella la cui interazione con l'apparato sperimentale (interferometro per le frange d'interferenza — bordo del filo per le frange di diffrazione) dà luogo ad una distribuzione spaziale descrivibile matematicamente tramite un'onda.

Possiamo chiarire ulteriormente quest'ultimo punto considerando la figura d'interferenza cosí come è stata ottenuta su di una lastra fotografica (vedi ad esempio fig. 5).

In quest'ultima la rivelazione degli elettroni avviene tramite l'annerimento dei singoli granuli dell'emulsione per cui l'annerimento in una certa regione della lastra sarà proporzionale al numero di elettroni che sono arrivati in quella regione.

Se misuriamo l'annerimento della lastra lungo una direzione perpendicolare al sistema di frange con uno strumento opportuno (ad esempio con un microdensitometro) otteniamo la curva riportata in fig. 10. Questa curva, che ci è familiare nello studio dell'intensità risultante dall'interferenza di due perturbazioni ondulatorie, indica, in questo caso, il numero n di elettroni che sono andati a colpire le diverse regioni della lastra fotografica. Quindi, se N è il numero totale di elettroni incidenti, la curva permette di ricavare quale frazione di essi si disporrà nelle diverse posizioni. Se questa curva viene riferita ad un singolo elettrone, la stessa mi dirà quale probabilità ha l'elettrone di andare in una posizione anziché in un'altra.

In conclusione gli elettroni arrivano sullo schermo come se fossero particelle, ma la loro probabilità di arrivo è determinata da una curva che ci è nota nello studio dei fenomeni d'interferenza della luce, ove rappresenta la distribuzione dell'intensità luminosa. *È in questo senso* che gli elettroni si comportano come onde.

(*) Le riprese effettuate sono il nucleo centrale di un film didattico scientifico dal titolo *Interferenza di elettroni* realizzato da P. G. Merli, G. F. Missiroli, L. Morettini, D. Nobili e G. Pozzi. Il film ha una durata di 15 minuti, un passo di 16 mm, colore, sonoro, ed è prodotto dal LAMEL-C.N.R. che ne cura la distribuzione.

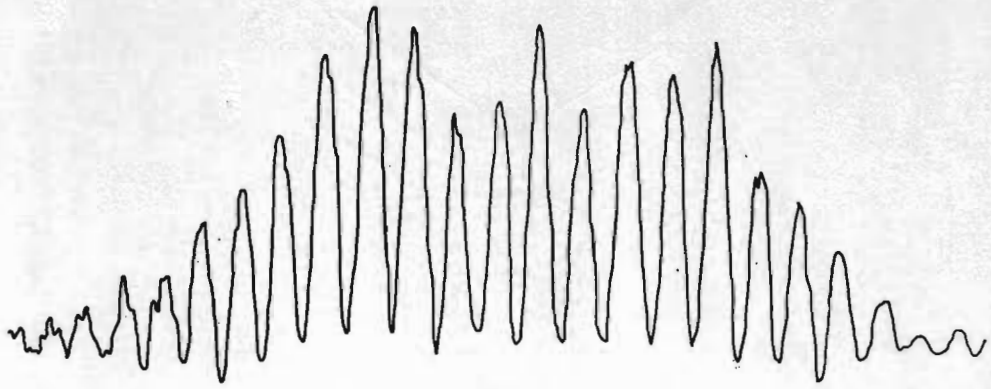


Fig. 10. – Curva densitometrica di un sistema di frange d'interferenza.

6. Conclusioni.

Ci piace a questo punto concludere con quanto riporta il Caldirola nel suo libro *Dalla microfisica alla macrofisica* (14).

Da quanto precede ci si rende conto anche come l'onda associata alla particella, di cui si è solito parlare nelle correnti esposizioni della meccanica quantistica, sia di natura essenzialmente diversa dagli ordinari fenomeni ondosi della meccanica dei corpi continui macroscopici e della teoria del campo elettromagnetico. Osserva Planck a questo proposito « il nome di onde non ci deve illudere .... Il significato di questa parola nella meccanica quantistica è ben differente da quello che essa possiede nella fisica classica. In questa per onda s'intende un processo ben determinato, un movimento percepibile coi sensi od un campo elettromagnetico alternato accessibile ad una misurazione diretta. Nella meccanica quantistica invece la parola onda è collegata soltanto alla [*ampiezza di*] *probabilità di esistenza di un determinato stato. Infatti ciò che si divide quando un fotone od un elettrone colpisce una lastra di cristallo per produrre i fenomeni d'interferenza non è già lo stesso fotone od elettrone, ma è soltanto la* [*ampiezza di*] *probabilità di presenza del fotone od elettrone inscindibili.*

Solo quando è enorme il numero dei fotoni o degli elettroni incidenti, questa grandezza rappresenta un ben determinato numero di fotoni o di elettroni. »

(14) P. CALDIROLA: *Dalla microfisica alla macrofisica* (Milano, 1974), p. 36.

Appendice I.

Nella progettazione dell'interferometro occorre tenere presente alcuni importanti problemi quali:

i) non devono essere usati materiali magnetici onde evitare qualsiasi perturbazione al campo delle lenti del microscopio,

ii) i materiali isolanti presenti nel biprisma non devono caricarsi elettrostaticamente e pertanto devono essere schermati,

iii) i contatti elettrici non devono modificare il campo elettrico del biprisma.

Nel sèguito mostreremo due diversi montaggi sperimentali di un interferometro. Nel primo (15) il biprisma viene montato nella cartuccia portacampioni modificata nella sua parte centrale come mostrato in fig. A_1.

Un cilindro A (diametro 5.5 mm,

(15) O. DONATI, G. F. MISSIROLI e G. POZZI: *Amer. Journ. Phys.*, **41**, 639 (1973).

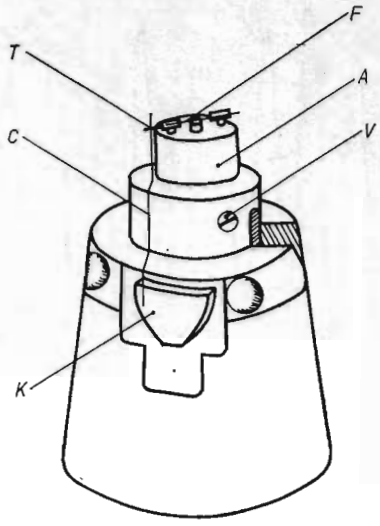


Fig. A_1. – Cartuccia standard portapreparati modificata per realizzare esperimenti d'interferenza con elettroni: *A* cilindro di supporto dell'interferometro; *F* filo dell'interferometro; *V* vite di fermo del cilindro *A*; *T* appendice che permette il contatto elettrico fra il filo *C* e l'interferometro *F*; *K* placca isolata della cartuccia portaoggetti collegata elettricamente col filo *C* e col generatore di tensione esterno

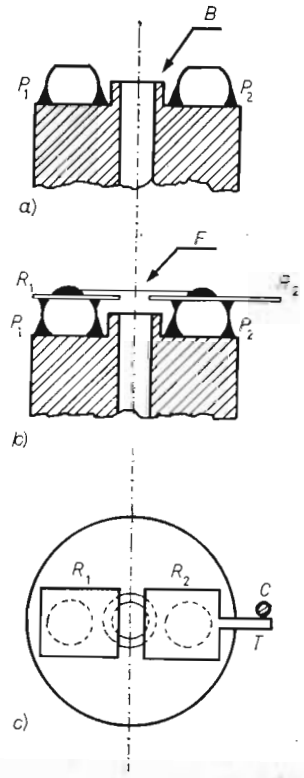


Fig. A_2. – *a*), *b*), *c*) dettagli del montaggio dell'interferometro sul cilindretto *A*: P_1, P_2 perline isolanti; R_1, R_2 piastrine di rame; *F* filo dell'interferometro; *T* appendice della placchetta R_2 che permette il contatto elettrico col filo conduttore *C*.

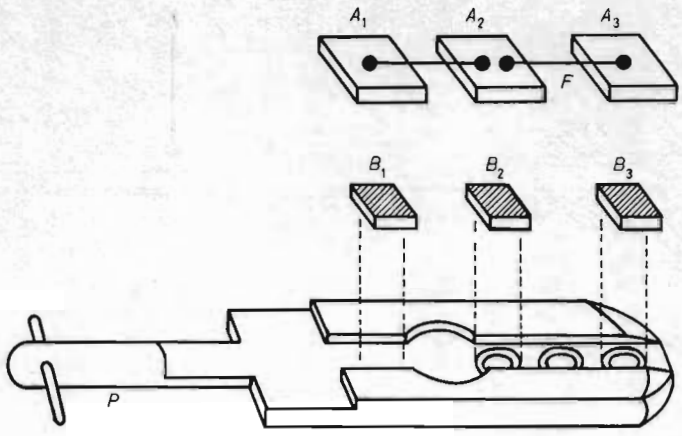


Fig. A_3. – Dettagli del montaggio dell'interferometro su di un portadiaframmi: P portadiaframmi di serie; A_1, A_2, A_3 placchette di rame; B_1, B_2, B_3 piastrine isolanti; F filo dell'interferometro.

lunghezza 10 mm) è stato fissato per mezzo di una vite di fermo V al centro del portaoggetti in luogo del normale dispositivo che sostiene il campione da osservare.

Sul cilindro A è disposto il filo conduttore F che costituisce l'interferometro vero e proprio ed è isolato elettricamente da massa come illustrato in fig. $A_2\,b$). P_1 e P_2 sono due perline di materiale isolante fissate sul cilindro A a mezzo di cemento non conduttore (fig. $A_2\,a$)). Due piastrine di rame R_1 e R_2, dello spessore di 50 μm e sagomate come mostrato in fig. $A_2\,c$) sono state fissate sulle due perline isolanti P_1 e P_2 sempre a mezzo di cemento non conduttore. Gli isolatori P_1 e P_2 risultano, se osservati dall'alto, completamente ricoperti dalle placchette di rame mentre il dentino B ai bordi del foro del cilindretto impedisce che le perline isolanti si possano caricare a causa degli elettroni diffusi lateralmente.

Il foro centrale del cilindretto A è parzialmente coperto dalle placchette di rame cosí come illustrato in fig. $A_2\,c$). Il filo F è posto al centro del foro ed è saldato sulle placchette di rame per mezzo di cemento conduttore. Il contatto elettrico col filo viene realizzato attraverso l'appendice T della placchetta di rame R_2 per mezzo di un filo conduttore C collegato alla placca isolata K della cartuccia (fig. A_1 e A_2).

L'elasticità del filo conduttore C assicura un buon contatto con la placchetta R_2. Il collegamento della placca K col generatore di tensione esterno viene realizzato sfruttando i contatti elettrici di cui è provvisto il tavolino universale portacampioni del microscopio.

Il filo F con cui è stato realizzato il biprisma è stato « tirato » da una bacchetta di vetro portata a fusione con un normale cannello a gas. Per ottenere fili piú sottili la parte centrale della bacchetta di vetro, una volta fusa, è resa fluida il piú possibile. Allontanando rapidissimamente le due parti della bacchetta si ottengono agli estremi due monconi, relativamente grossi, che terminano in un sottilissimo filo non facilmente visibile a occhio nudo. È questo tratto di filo che viene usato per realizzare il biprisma. L'operazione di saldatura sulla parte superiore del cilindretto A avviene sotto un microscopio stereo-

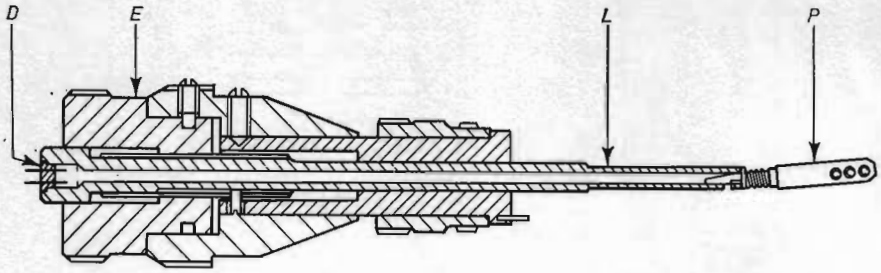


Fig. A_4. – Schema complessivo del dispositivo di supporto e di avanzamento dell'interferometro, *P* portadiaframmi; *L* asta centrale cava del portadiaframmi che permette il passaggio di un conduttore elettrico sino all'interferometro; *D* passante elettrico isolato; *E* dispositivo che regola l'avanzamento micrometrico del portadiaframmi *P*.

scopico a qualche decina d'ingrandimenti.

I fili una volta montati, come è risultato da successive misure effettuate al microscopio elettronico, hanno diametri compresi fra 0.3 μm e 1 μm. È possibile tendere e fissare fili cosí sottili anche sotto un microscopio a basso ingrandimento purché si sfrutti luce radente e illuminazione dal basso. Data la delicatezza del montaggio è conveniente realizzare diversi fili, sistemati su altrettanti cilindretti, che possono trovare facile sostituzione nella cartuccia portapreparati.

I fili vengono quindi resi conduttori mediante evaporazione sotto vuoto di un primo strato di cromo di qualche decina di Å, e di un successivo strato di oro di qualche centinaia di Å di spessore. L'evaporazione dell'oro viene effettuata da tre posizioni diverse per rendere completamente conduttore il filo su tutta la superficie laterale ed evitare cosí ogni effetto di carica elettrostatica. Nonostante l'estrema sottigliezza dei fili, prima d'inserirli nel microscopio elettronico si può verificare con un normale ohmetro se l'evaporazione lo ha reso conduttore. Infatti la presenza di piccole impurità sul filo possono impedire che si realizzi la continuità elettrica fra i due estremi del filo saldati alle placchette R_1 ed R_2 del dispositivo.

Il secondo modo che presentiamo per inserire l'interferometro entro il microscopio elettronico consiste nello sfruttamento del portadiaframmi della lente intermedia o dell'obbiettivo come supporto del filo stesso. L'operazione di adattamento è facile e può venire usata in tutti quei casi in cui non sia disponibile il tavolino universale coi contatti incorporati previsto nel caso precedente, oppure quando si voglia osservare contemporaneamente al sistema di frange anche un campione che funge da oggetto di fase.

La fig. A_3 e la fig. A_4 illustrano rispettivamente una visione esplosa del biprisma di Fresnel e la sezione del portadiaframmi modificata nella sua parte centrale per ricavare il collegamento elettrico con il biprisma stesso.

Con riferimento alla fig. A_3 il portadiaframmi *P* sostiene tre placchette di rame A_1, A_2, A_3 isolate elettricamente da massa mediante le tre piastre isolanti B_1, B_2, B_3. Anche in questo caso le placchette di rame ricoprono completamente quelle isolanti per impedire che si carichino elettrostaticamente. Il filo *F* del biprisma è saldato alle due placchette A_2 e A_3 a mezzo di cemento

conduttore e viene realizzato seguendo gli stessi criteri illustrati nella sezione precedente. Sulla placchetta A_1 viene saldato il filo proveniente dall'esterno. Questo per impedire che nella saldatura si possa danneggiare il filo F dell'interferometro.

La fig. A$_4$ illustra la sezione dell'intero dispositivo che serve per inserire, muovendolo dall'esterno della colonna del microscopio, il filo F dell'interferometro in asse col fascio elettronico e per dare ad esso la voluta d.d.p. La principale modifica apportata al dispositivo è stata quella di sostituire l'asta centrale L con un'asta forata all'interno della quale è sistemato il conduttore elettrico che porta tensione al filo e che di volta in volta viene saldato sulla piastrina A_1. Un passante elettrico D permette il collegamento fra il generatore di tensione esterno ed il conduttore isolato disposto al centro dell'asta L. La regolazione micrometrica E che permette gli spostamenti fini del portadiaframmi P consente un avanzamento del dispositivo di circa 3 cm.

Dato che il portadiaframmi è lo stesso per tutti i microscopi elettronici Siemens della Serie Elmiskop 1, 1A, 101, il dispositivo illustrato può essere usato indifferentemente in uno qualunque di questi microscopi. Anzi, progettando in maniera opportuna la lunghezza dell'asta L si può inserire l'interferometro non solo a livello del diaframma della lente intermedia ma anche a livello del diaframma della lente obbiettivo.

Appendice II.

La densità di corrente J sulla lastra fotografica, dovuta all'arrivo degli elettroni emessi dal filamento che funge da sorgente, è data da

$$J = R\beta^2\pi/M^2, \tag{7}$$

dove R = brillanza del cannone elettronico, β = semiangolo d'illuminazione del piano di osservazione PO, M = ingrandimento lineare del piano PO sulla lastra fotografica. Con i valori sperimentali a disposizione $R = 2\cdot10^5$ A$\cdot$ $\cdot$cm$^{-2}\cdot$sr^{-1}, $\beta = 10^{-7}$ rad, $M = 240$ ingrandimenti, risulta

$$J \simeq 10^{-12}\ \text{A}\cdot\text{cm}^{-2}.$$

Dato che la superficie totale del campo d'interferenza sulla lastra è di circa 1 cm^2, gli elettroni N che vi cadono in un secondo sono

$$N = 2\cdot J\cdot S\cdot \text{ampere} =$$
$$= 2\cdot J\cdot S\cdot 6.3\cdot10^{18}\ \text{elettroni s}^{-1} =$$
$$= 1.4\cdot10^{7}\ \text{elettroni}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Il fattore 2 dipende dal fatto che l'intensità media nella zona di sovrapposizione dei fasci è doppia rispetto al resto del piano di osservazione. Dato che gli elettroni accelerati a 100 kV hanno una velocità $v = 1.6\cdot10^8$ m/s, se ne ricava che la distanza media L tra due elettroni è di

$$L = v/N \simeq 10\ \text{m}.$$

* * *

Ringraziamo per la collaborazione fornita i professori Angelo Bairati ed Aurelio Bairati dell'Istituto di Anatomia Umana dell'Università di Milano, l'ingegnere G. Boninsegna della Siemens Elettra, il dr. L. Morettini dell'Istituto di Metallurgia dell'Università di Bologna, il signor G. Ruffini del LAMEL-C.N.R. e G. Matteucci dell'Istituto di Fisica dell'Università di Bologna.