

Questa rubrica si propone di stimolare la riflessione sul tipo di conoscenza prodotta dalla fisica e di porre in evidenza termini e concetti che costituiscono punti nodali per l'apprendimento della disciplina. L'approccio storico - critico, così come quello didattico, non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi.

Interferenza.

Supponiamo che un certo numero di onde di uguale altezza si muovano, con velocità costante, su di una superficie di un lago stagnante e che entrino in uno stretto canale che porti fuori dal lago; supponiamo poi che un'altra simile causa abbia prodotto un'altra serie di onde che arrivano allo stesso canale, con la stessa velocità e allo stesso istante. Nessuna delle due serie di onde distruggerà l'altra, ma i loro effetti si combineranno; se esse entreranno nel canale in modo tale che le creste di una serie coincideranno con quelle dell'altra, esse produrranno insieme una serie di creste più alte; ma se le creste di una serie sono collocate in modo tale da corrispondere agli avvallamenti dell'altra, esse riempiranno esattamente quegli avvallamenti e la superficie dell'acqua rimarrà piatta. Sostengo che effetti simili si producono ogniqualvolta due porzioni di luce si mescolano in questo modo; e chiamo questo la legge generale dell'interferenza della luce [1].

Thomas Young

1. Introduzione

Il 24 novembre 1803, Thomas Young tenne una lezione alla Royal Society intitolata *Esperimenti e calcoli relativi all'ottica fisica*. Scrive Young:

“L'affermazione su cui intendo insistere è semplicemente che le frange di colore sono prodotte dall'interferenza di due porzioni di luce; e penso non verrà negato anche dal più prevenuto che [questa] affermazione è provata dagli esperimenti sui quali riferirò; esperimenti che possono essere ripetuti con grande facilità, quando il sole risplende e senza alcun altro apparato che non sia a disposizione di chiunque” [2].

Il primo esperimento è una versione dell'esperimento delle due fenditure (sezione 6.2):

“Nell'imposta di una finestra ho fatto un piccolo foro e l'ho ricoperto con uno spesso foglio di carta perforato con un piccolo ago. Per facilitare l'osservazione, ho posizionato, senza l'imposta della finestra, un piccolo specchio in modo tale da riflettere la luce del sole in una direzione quasi orizzontale, sulla parete opposta, e di far passare il cono della luce divergente su un tavolo, su cui erano

posti diversi piccoli schermi di cartoncino. Ho collocato nel fascio di luce un cartoncino, il cui spessore era di circa un trentesimo di pollice e ho osservato la sua ombra sulla parete o su altri cartoncini posti a distanze diverse. Oltre alle frange colorate da entrambe le parti dell'ombra, l'ombra medesima era divisa da frange simili parallele, di minori dimensioni, in numero diverso a seconda della distanza di osservazione dell'ombra, ma con il centro dell'ombra sempre bianco" [3] ⁽¹⁾.

Da allora, l'esperimento delle due fenditure ha svolto un ruolo di primaria importanza nella storia della fisica.

2. Che cos'è un'onda: descrizione matematica

I fenomeni di interferenza sono descritti da formalismi che fanno uso del concetto di onda e/o di grandezze fisiche tipiche dell'onda. Per questo motivo, riteniamo opportuno iniziare con una rassegna delle proprietà delle onde. Se la funzione

$$(1) \quad f(x - Vt)$$

è un'espressione arbitraria dell'argomento $(x - Vt)$, dove x è una variabile spaziale, t la variabile tempo e V una velocità, diciamo che $f(x - Vt)$ rappresenta un'onda piana che si propaga con velocità V lungo la direzione positiva dell'asse x . Si può infatti verificare che l'uguaglianza

$$x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1)$$

è condizione necessaria e sufficiente affinché, qualunque sia l'espressione analitica di f , si abbia

$$f(x_1 - Vt_1) = f(x_2 - Vt_2),$$

dove (x_1, t_1) e (x_2, t_2) sono due coppie di variabili arbitrariamente scelte con $t_1 < t_2$. Il valore che la funzione assume all'istante t_2 nel punto x_2 è lo stesso che la funzione aveva all'istante precedente t_1 nel punto x_1 la cui distanza da x_2 è pari a $V(t_2 - t_1)$. In altri termini: il valore della funzione in questione *si è spostato* da x_1 a x_2 ($x_2 > x_1$) con velocità V . Per questa ragione, si dice che $f(x - Vt)$ rappresenta un'onda *progressiva* (per motivi simili, $f(x + Vt)$ rappresenta un'onda *regressiva*). $f(x \pm Vt)$ non dipende da y e da z . Fissata una coppia di valori (x, t) , $f(x \pm Vt)$ ha lo stesso valore in tutti i punti del piano $x = \text{costante}$, detto *fronte d'onda*: per questa ragione si dice che $f(x \pm Vt)$ rappresenta un'onda piana.

⁽¹⁾ In [4] si trova una proposta per realizzare l'esperimento di Young in laboratorio usando un laser.

Come si può verificare per semplice sostituzione, essa è una soluzione dell'equazione “delle onde” monodimensionale di D'Alembert,

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Siccome l'eq. (2) è lineare nella funzione $f(x, t)$, ogni combinazione lineare di soluzioni della (2) costituisce, a sua volta, una soluzione della (2). Questa proprietà è denominata con il termine di *regola di sovrapposizione* ⁽²⁾.

L'equazione delle onde di d'Alembert tridimensionale è

$$(3) \quad \nabla^2 f(x, y, z, t) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0,$$

dove $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ è l'operatore laplaciano.

Si introducano le seguenti grandezze:

$$\lambda\nu = V, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu$$

con λ avente la dimensione di una lunghezza. Le grandezze λ , ν e ω si chiamano, rispettivamente, lunghezza d'onda, frequenza e pulsazione; k è il modulo del “vettore d'onda”, diretto lungo la direzione di propagazione dell'onda. Allora la funzione

$$(4) \quad f(x, t) = f_0 \sin[k(x - Vt)] = f_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - Vt) = f_0 \sin(kx - \omega t)$$

rappresenta un'onda piana *monocromatica* (perché dipendente da una sola frequenza) propagantesi lungo la direzione positiva dell'asse x . Fissato x , f dipende sinusoidalmente da t , con periodo temporale $T = 1/\nu$; fissato t , f dipende sinusoidalmente da x con periodo spaziale λ ⁽³⁾.

3. Interferenza

Si supponga che in un punto dello spazio siano definite due grandezze fisiche dimensionalmente identiche ed espresse rispettivamente da

$$(5) \quad \xi_1(t) = \xi_{1_0} \sin \omega t, \quad \xi_2(t) = \xi_{2_0} \sin(\omega t + \delta)$$

e che valga una regola di sovrapposizione per cui la grandezza fisica risultante è la somma delle grandezze fisiche componenti

$$(6) \quad \xi(t) = \xi_{1_0} \sin \omega t + \xi_{2_0} \sin(\omega t + \delta).$$

Il valore della grandezza risultante dipenderà, tra l'altro, dalla differenza di fase δ tra

⁽²⁾ Sovente questa regola, che è una immediata conseguenza della linearità delle equazioni, è chiamata “principio di sovrapposizione”: tuttavia, l'uso del termine “principio” non è, in questo caso, appropriato.

⁽³⁾ Un'onda piana monocromatica propagantesi lungo la direzione del suo vettore d'onda \vec{k} è descritta, in notazione complessa, dall'equazione $f(\vec{r}, t) = f_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$.

le grandezze componenti. Nel caso particolare in cui l'ampiezza delle due componenti sia la stessa ($\xi_{1_0} = \xi_{2_0} = \xi_0$) l'ampiezza risultante sarà

$$(7) \quad \xi(t) = 2\xi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \cos\frac{\delta}{2}.$$

In particolare, si avrà $\xi(t) = 2\xi_0 \sin\omega t$ se $\delta = 2\pi n$ o $\xi(t) = 0$ se $\delta = (2n+1)\pi$ essendo n un numero intero.

Come è evidente, le eq. (5) non rappresentano onde, ma, eventualmente, la variazione temporale, in un punto di coordinate (x, y, z) , di due onde provenienti da due sorgenti distinte ed aventi una differenza di fase costante δ .

Diciamo che i fenomeni descritti dalla (7) sono fenomeni di *interferenza*.

4. Onde meccaniche

Nelle onde meccaniche la grandezza fisica soluzione dell'equazione di d'Alembert è costituita dallo spostamento, rispetto ad una posizione di equilibrio, di una particella dotata di massa. Tra le onde meccaniche, quelle più note sono le onde acustiche (l'aggettivo richiama l'intervallo di frequenze udibile dall'orecchio umano). Come è noto, esse possono essere longitudinali o trasversali: nel primo caso lo spostamento delle particelle materiali avviene lungo la direzione di propagazione dell'onda; nell'altro, in direzione perpendicolare.

5. Onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell (\rightarrow Maxwell, teoria di), scritte in funzione dei campi elettrico e magnetico in assenza di sorgenti conducono all'equazione delle onde di d'Alembert (3) (o, come caso particolare alla (2)) in cui la $f(x, y, z, t)$ rappresenta una delle componenti dei campi che risultano perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda.

6. Interferenza di onde elettromagnetiche

La trattazione formale dei fenomeni di interferenza tra onde elettromagnetiche può essere svolta a diversi livelli ⁽⁴⁾. Quella più generale prevede l'uso del teorema di Kirchhoff (che può essere visto come una formalizzazione del principio di Huygens); trattazioni più semplici si basano sull'uso dei fasori ⁽⁵⁾. La trattazione si svolge supponendo di sovrapporre due onde elettromagnetiche aventi le seguenti

⁽⁴⁾ Premesso che i fenomeni di diffrazione sono fenomeni interferenziali, si usa parlare di interferenza in presenza di un numero discreto di sorgenti e di diffrazione quando la distribuzione delle sorgenti è continua (o quasi continua, come nel caso dei "reticoli di diffrazione"). Per esempio, nel caso dell'esperimento delle due fenditure (6.2) l'intensità osservata dipende dal prodotto di due termini (eq. (9)): uno, in (\cos^2) , dipende dal fatto che le fenditure sono due (interferenza), l'altro, in (\sin^2) , dai contributi dovuti alle (al limite infinite) parti in cui si suddivide ciascuna fenditura (diffrazione).

⁽⁵⁾ Si veda, per esempio, [5].

caratteristiche:

- stessa frequenza,
- medesima polarizzazione lineare ⁽⁶⁾,
- differenza di fase costante in ogni punto della regione di sovrapposizione (coerenza).

6.1. Coerenza tra fasci di luce

Due fasci di luce che si sovrappongono in una regione dello spazio si dicono *coerenti* se la loro differenza di fase, in un punto qualsiasi della regione di sovrapposizione, è costante nel tempo.

Le definizioni di visibilità delle frange di interferenza permette di definire, in termini operativi, il *grado di coerenza* di due fasci di luce ⁽⁷⁾. Dati due fasci di luce che interferiscono, si definisce *visibilità delle frange* il rapporto

$$(8) \quad V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

dove le intensità che compaiono in questa equazione sono quelle corrispondenti ai massimi ed ai minimi di interferenza. I due fasci di luce si dicono allora:

- i) *coerenti* se, nelle migliori condizioni di osservazione (cioè quando le intensità dei due fasci sono identiche), danno luogo a frange di interferenza con visibilità uguale ad uno;
- ii) *incoerenti* se non producono frange di interferenza;
- iii) *parzialmente coerenti* se le migliori frange di interferenza da essi prodotte hanno visibilità compresa tra zero ed uno; in questo caso, la visibilità delle frange è assunta come una misura del *grado di coerenza*.

La *coerenza* è definita come una proprietà relazionale tra due fasci di luce; tale definizione può essere estesa anche a due sorgenti di luce. Quando due sorgenti di luce sono *coerenti* la differenza di fase tra di esse è costante e, quindi, esattamente definita; quando sono *incoerenti* la loro differenza di fase fluttua rapidamente e irregolarmente e, quindi, non ha un valore definito; quando sono *parzialmente coerenti* la luce proveniente da esse è sempre divisibile in due parti: una *coerente*, l'altra *incoerente*; le frange prodotte dalla parte coerente sono sovrapposte ad un fondo uniforme dovuto alla parte incoerente ed hanno pertanto una visibilità minore di uno.

⁽⁶⁾ Se le due onde sono polarizzate linearmente lungo due direzioni perpendicolari, *non* si osservano frange di interferenza. Indicato con E il modulo istantaneo del campo elettrico risultante, con E_x e E_y i valori istantanei del campo elettrico lungo le due direzioni perpendicolari, vale la relazione $\langle E^2 \rangle = E_0^2$, dove la media è effettuata su un periodo e E_0 indica l'ampiezza massima del campo lungo x e lungo y . Questa relazione vale per qualunque relazione di fase tra le due componenti perpendicolari. Ne segue che sullo schermo di rivelazione l'intensità luminosa è uniforme. La prima osservazione sperimentale di questo fenomeno è dovuta ad Arago e Fresnel (1816).

⁽⁷⁾ Il concetto di "visibilità delle frange di interferenza" è stato introdotto da Albert Michelson.

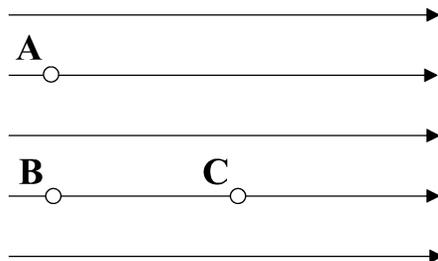


Fig. 1. - Per la definizione di *larghezza* e *lunghezza* di coerenza di un fascio di luce si veda il testo.

Il concetto di *coerenza* può essere esteso anche ad un singolo fascio di luce. Si consideri il fascio di luce parallelo della fig. 1. In prima istanza, si supponga che esso sia perfettamente monocromatico; se il fascio è intercettato da uno schermo con due piccoli fori *A* e *B*, questi diventano due sorgenti puntiformi. Ad esse si può quindi applicare il criterio di coerenza tra due sorgenti: la *larghezza di coerenza* del fascio è definita come la massima distanza tra i due fori che garantisce un grado di coerenza accettabile.

Se il fascio non è perfettamente monocromatico (come accade sempre) i due punti *B* e *C*, appartenenti allo stesso “raggio” e considerati come sorgenti puntiformi, non sono perfettamente coerenti: si definisce pertanto una *lunghezza di coerenza del fascio* come la massima distanza tra due punti come *B* e *C* che garantisce un grado di coerenza accettabile.

La larghezza di coerenza specifica il grado di coerenza *spaziale* di un fascio di luce; la lunghezza di coerenza ne specifica invece il grado di coerenza *temporale*. La lunghezza di coerenza è infatti legata al *tempo di coerenza* τ dalla relazione: $l = c\tau$.

Il processo di emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una sorgente macroscopica ha una durata limitata. Si consideri il caso ideale in cui N_0 atomi (che costituiscono la sorgente), compiano una transizione all'istante $t = 0$ che li collochi in uno stato elettronico eccitato E_i ; se la vita media dello stato E_i è τ , allora, dopo un intervallo di tempo t , il numero degli atomi che si trovano ancora nello stato eccitato sarà dato da

$$N = N_0 e^{-t/\tau}.$$

Per descrivere questo processo dal punto di vista ondulatorio, si può assumere τ come una ragionevole misura della durata del processo di emissione di un'onda sinusoidale di pulsazione ω da parte della sorgente. Diciamo allora che un'onda elettromagnetica sinusoidale di pulsazione ω è stata emessa nell'origine delle coordinate a partire dall'istante $t = 0$ sino all'istante $t = \tau$: all'istante $t = \tau$ l'onda si estende quindi, lungo la direzione x , su una lunghezza pari a $c\tau$, se la propagazione avviene nel vuoto. In questo *modello*, la lunghezza l viene assunta come “lunghezza di coerenza”: l'intervallo di tempo τ si chiama *tempo di coerenza*. (Si noti che la “lunghezza di coerenza” è stata precedentemente definita in termini puramente operativi, indipendenti dal modello teorico usato.)

Se la vita media τ di uno stato eccitato di un atomo è di 10^{-8} s, ne segue che, secondo il modello adottato, la lunghezza di coerenza della radiazione emessa

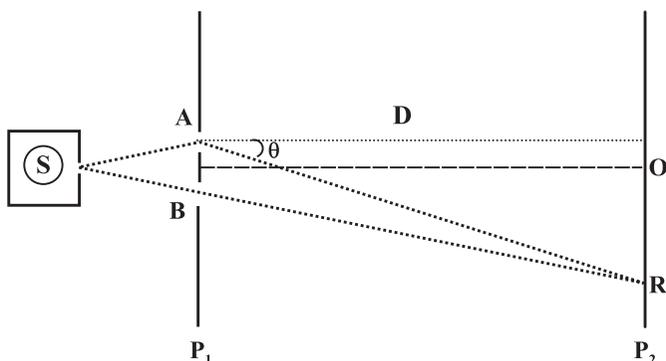


Fig. 2. - Interferenza con due fenditure A e B . S è la sorgente luminosa. Ogni fenditura è rettangolare di lati a e b , con $b \ll a$; il lato lungo a delle due fenditure è perpendicolare al piano della figura. La distanza D tra gli schermi P_1 e P_2 è tale che $D \gg d$, dove d è la distanza tra due punti omologhi delle due fenditure. Siccome $D \gg d$ la differenza tra i cammini geometrici di due "raggi" provenienti da due strisce omologhe delle due fenditure (distanti d) è data da $\approx d \sin \theta$. Questa disposizione sperimentale si chiama di Fraunhofer.

nel vuoto è di $c\tau \approx 3$ m. Nel caso dei laser, lo stato eccitato responsabile della transizione "laser" può avere una vita media dell'ordine di 10^{-3} s: la lunghezza di coerenza della radiazione emessa è in questo caso dell'ordine di 3×10^5 m.

6.2. Esperimento delle due fenditure

Un fascio di luce proveniente da una sorgente è diviso, mediante certi metodi ottici, in due parti e queste, dopo aver percorso cammini diversi, sono ricongiunte e cadono sopra uno schermo. Se uno dei due fasci è intercettato, l'altro cade sullo schermo e lo illumina; ma se entrambi i fasci passano, lo schermo diventa scuro in certi posti mostrando così che due porzioni di luce si sono distrutte a vicenda [6].

James Clerk Maxwell

Come mostrato nell'introduzione, Young aveva realizzato un esperimento di questo tipo ai primi dell'Ottocento. Altri modi di realizzazione dell'esperimento descritto da Maxwell prevedono l'uso di interferometri, come quello di Michelson o di Mach-Zender ⁽⁸⁾. L'uso di questi strumenti è particolarmente istruttivo perché le condizioni di interferenza dipendono dalla lunghezza "ottica" dei due "bracci" dell'interferometro, modificabili dallo sperimentatore. Tuttavia, per il ruolo che ha svolto nella storia della fisica, discuteremo qui un esperimento più complesso: l'esperimento delle due fenditure, illustrato in fig. 2. Le frange di interferenza si osservano su un secondo schermo posto a distanza sufficientemente grande dal primo, in modo da poter adottare alcune approssimazioni di calcolo. Nella trattazione teorica si suppone che le due

⁽⁸⁾ Si veda, per esempio, [7].

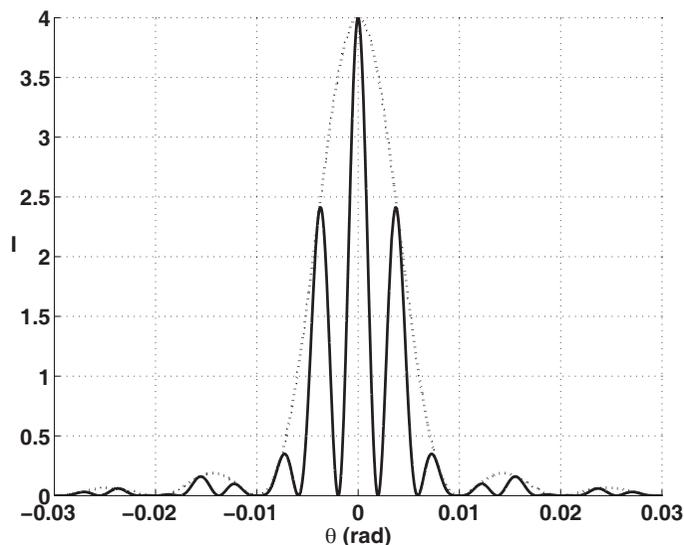


Fig. 3. - Figura di interferenza prodotta da due fenditure secondo la (9), in cui si è posto $I_0 = 1$. I valori dei parametri usati sono: $b/\lambda = 100$; $d/b = 8$. La curva continua rappresenta l'intensità prevista; la curva tratteggiata il termine diffrattivo in (\sin^2) : sarebbe la curva prevista con una sola fenditura la cui intensità fosse quadrupla di quella considerata.

sorgenti costituite dalle due fenditure abbiano la stessa intensità e che la porzione d'onda elettromagnetica che le investe possa considerarsi piana. Sullo schermo P_2 l'intensità luminosa sarà allora data dalla formula

$$(9) \quad I = 4I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda},$$

dove I_0 è l'intensità massima prevista nel caso in cui fosse aperta una sola fenditura e λ la lunghezza d'onda usata. L'intensità descritta dalla (9) è rappresentata in fig. 3, dove si è assunta uguale ad 1 l'intensità I_0 . La curva continua rappresenta l'intensità prevista; la curva tratteggiata il termine diffrattivo in (\sin^2) : sarebbe la curva osservata con una sola fenditura la cui intensità fosse quadrupla di quella considerata.

La descrizione dell'esperimento delle due fenditure suggerisce le seguenti riflessioni:

- La predizione della distribuzione dell'energia sullo schermo è una conseguenza diretta della regola di sovrapposizione vettoriale dei campi, implicita nelle equazioni di Maxwell. In un generico punto R dello schermo, si sommano i campi elettrici delle porzioni d'onda provenienti dalle due fenditure A e B : l'energia depositata nel punto R risulta proporzionale al quadrato del campo elettrico risultante.
- Supponiamo che R sia un punto di buio, cioè un punto in cui i campi elettrici si sommano in modo tale per cui il loro risultante è nullo. I campi, provenienti da A e da B si incontrano in R , interferiscono e si annullano. Dove è finita l'energia associata alle due porzioni d'onda (ai due campi)?
- Supponiamo che R sia un punto di massima luce: i campi si sommano in modo tale da dare $\vec{E}_T = \vec{E}_A + \vec{E}_B = 2\vec{E}_0$, se si assume che l'ampiezza delle due onde in

R sia la stessa ed uguale ad E_0 . L'energia depositata in R è in questo caso proporzionale a $4E_0^2$, mentre l'energia associata a ciascuno dei due campi interferenti è proporzionale a E_0^2 : da dove proviene l'eccesso di energia proporzionale a $2E_0^2$?

d) Quindi, è come se una quantità di energia pari a $2E_0^2$ si trasferisca dai punti di buio ai punti di massima luce, introducendo una anomalia causale nella descrizione.

La teoria prevede correttamente quale è il valore dei campi in un generico punto dello schermo e quale è la distribuzione di energia sullo schermo: non è invece in grado di descrivere quale sia il percorso dell'energia tra le due fenditure e lo schermo e, quindi, quale sia il percorso dell'energia tra la sorgente e lo schermo. È pertanto erroneo pensare che queste caratteristiche siano una novità introdotta nella descrizione dell'esperimento dalla Meccanica Quantica.

Si noti infine come, introducendo l'ipotesi *ad hoc* secondo cui la probabilità che un fotone arrivi nel punto generico R dello schermo è proporzionale all'intensità nel punto R , la teoria di Maxwell-Lorentz acquista le stesse capacità predittive della descrizione quantica, nel senso che descrive anche il comportamento probabilistico di un singolo fotone.

6.2.1. Interferenza con il doppio prisma (bi-prisma) di Fresnel

Il doppio prisma di Fresnel è (come se fosse) costituito da due prismi identici con una base in comune. Se un fascio di luce monocromatica prodotto da una sorgente puntiforme incide sul prisma, esso è suddiviso in due fasci che si sovrappongono in una regione di spazio centrata intorno all'asse di simmetria del prisma dando luogo a fenomeni di interferenza. I due fasci luminosi sembrano provenire da due sorgenti (dette sorgenti "virtuali") puntiformi poste simmetricamente rispetto all'asse di simmetria. Come vedremo nella sezione 7, un dispositivo equivalente al prisma doppio di Fresnel può essere realizzato in un apparato per la diffrazione di elettroni.

6.3. Misure di interferenza a basse intensità luminose

Nel 1908, Geoffrey Ingram Taylor ha condotto un esperimento di diffrazione usando una sorgente di luce molto debole [8]. L'idea dell'esperimento non fu suggerita dall'ipotesi dei quanti di luce di Einstein, ma da un'ipotesi di J. J. Thomson (suggerita, a sua volta, da esperimenti di ionizzazione condotti con luce e raggi X) secondo cui l'energia è distribuita

“... non uniformemente sul fronte d'onda. Ci sono regioni di energia massima separate da grandi regioni non perturbate [senza energia]. Quando l'intensità della luce è ridotta, la separazione di queste regioni aumenta, ma la quantità di energia in ciascuna di esse non cambia; cioè, esse sono unità indivisibili. Sinora, tutte le evidenze portate a supporto di questa teoria sono state di natura indiretta; poiché tutti i fenomeni ottici ordinari sono effetti medi, e sono pertanto incapaci di distinguere tra la usuale teoria elettromagnetica e la sua modificazione che stiamo considerando. Tuttavia, Sir J. J. Thomson ha suggerito che se in un esperimento di diffrazione l'intensità della luce viene ridotta a tal punto che solo poche di queste unità indivisibili sono contemporaneamente

associate ad un zona di Huygens, gli usuali fenomeni di diffrazione dovrebbero essere modificati” [9].

L’esperimento condotto usando come sorgente luminosa una fiamma a gas, filtri anneriti con fumo per diminuire l’intensità della luce, un ago quale elemento diffrattivo e lastre fotografiche quali rivelatori, ha mostrato, diversamente da quanto previsto, che le frange di diffrazione *non* si modificano diminuendo l’intensità della luce ⁽⁹⁾.

Nel 1927, A. J. Dempster e H. F. Batho hanno eseguito un esperimento dello stesso tipo con un controllo superiore dei parametri in gioco [10]. Dempster e Batho hanno studiato due tipi di figure di interferenza: quelle prodotte da un reticolo a gradini (*échelon*) e quelle prodotte da due lastre di vetro separate da un sottile strato d’aria. In entrambi i casi, le figure di interferenza si formavano sulla lastra fotografica anche quando un solo quanto alla volta attraversava, in media, l’apparato interferenziale.

Esperimenti di questo tipo sono oggi condotti con un controllo ancora maggiore per quanto concerne il numero di fotoni in volo nell’apparato ⁽¹⁰⁾.

La teoria di Maxwell-Lorentz predice correttamente l’intensità delle frange di interferenza anche nei casi in cui, dal punto di vista corpuscolare, solo un fotone alla volta è in volo, in media, tra la sorgente e lo schermo rivelatore. Ciò conferma che i valori assunti dalle grandezze fisiche usate nella teoria di Maxwell sono, dal punto di vista sperimentale, valori medi. La media deve essere effettuata su intervalli di tempo tali da coinvolgere, da un punto di vista corpuscolare, un numero statisticamente significativo di fotoni: è irrilevante se i fotoni arrivano sullo schermo rivelatore uno alla volta (sorgente debole) o in un brevissimo intervallo di tempo (sorgente intensa).

Si osservi tuttavia che l’espressione “solo un fotone alla volta è in volo, in media, tra la sorgente e lo schermo rivelatore” non implica —automaticamente— che le figure di interferenza siano effettivamente prodotte da singoli fotoni in volo tra la sorgente e lo schermo rivelatore: è *sempre* necessaria un’accurata analisi della disposizione sperimentale e dell’efficienza del rivelatore.

7. Figure di diffrazione ottenute con elettroni

Nel 1926, Davisson e Germer ottennero figure di diffrazione facendo diffondere un fascio di elettroni da cristalli di nichel [12]. Successivamente (1928), G. P. Thomson, figlio di J. J. Thomson, produsse figure di diffrazione facendo passare un fascio di elettroni attraverso sottili film di metallo [13] ⁽¹¹⁾.

⁽⁹⁾ Secondo Taylor, l’intensità I della luce visibile usata nel caso dell’esposizione più lunga (2000 ore equivalenti a circa 83 giorni) era di $5 \times 10^{-9} \text{ Js}^{-1}\text{m}^{-2}$. Assumendo per l’energia dei fotoni della luce visibile quella corrispondente alla lunghezza d’onda di 700 nm (assunzione che rende massima la densità dei fotoni), si ottiene, usando la formula $nh\nu c = I$ (n è la densità dei fotoni), che il numero medio di fotoni contenuti in un cilindro avente una base di 1 cm^2 e un’altezza di 3 m è di 0,018.

⁽¹⁰⁾ Si parla, in questi casi, di “interferenza con fotoni singoli” (sul reale significato di espressioni di questo tipo, si veda più avanti). Si veda, per esempio, [11] ed i lavori ivi citati.

⁽¹¹⁾ Per una discussione di questi argomenti si veda, per esempio [14].

Feynman, nelle sue *Physics Lectures*, prende in considerazione *un esperimento ideale* delle due fenditure condotto con elettroni invece che con luce [15]. In realtà, l'esperimento ideale discusso da Feynman era stato effettivamente svolto nel 1961 [16] e sarà ripetuto con significative varianti negli anni successivi.

Si consideri una disposizione sperimentale analoga a quella delle due fenditure discussa per la radiazione elettromagnetica (fig. 2): la sorgente di luce è sostituita da una sorgente di elettroni aventi tutti approssimativamente la stessa quantità di moto e lo schermo P_2 è di natura tale da poter rivelare l'arrivo degli elettroni.

La trattazione si basa sui seguenti postulati:

- A) La probabilità che un elettrone, dopo aver lasciato la sorgente S , arrivi nel punto R dello schermo P_2 è data dal quadrato del modulo di un numero complesso $Ce^{i\phi}$ detto *ampiezza di probabilità*: la fase ϕ è assunta uguale a $2\pi l/\lambda$, dove l è la lunghezza del cammino percorso dall'elettrone e λ la lunghezza d'onda di de Broglie ad esso associata. Siano $C_A e^{i\phi_A}$ e $C_B e^{i\phi_B}$ le ampiezze di probabilità associate al cammino SAR e SBR , rispettivamente.
- B) La probabilità che un elettrone giunga nel punto R dello schermo attraversando la fenditura A quando l'altra è chiusa è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza di probabilità relativa al cammino SAR , cioè da C_A^2 . Analogamente, la probabilità che un elettrone giunga nel punto R dello schermo attraversando la fenditura B quando l'altra è chiusa, è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza di probabilità relativa al cammino SBR , cioè da C_B^2 .
- C) La probabilità che un elettrone giunga nel punto R dello schermo quando entrambe le fenditure sono aperte è data dal *quadrato del modulo della somma delle ampiezze relative ai due cammini SAR e SBR* .

Quando entrambe le fenditure sono aperte, la probabilità che un elettrone arrivi nel punto R dello schermo è quindi data da

$$P = |(C_A e^{i\phi_A} + C_B e^{i\phi_B})|^2 = C_A^2 + C_B^2 + 2C_A C_B \cos \delta,$$

dove $\delta = \phi_A - \phi_B$. Indicata con $\lambda = h/p$ la lunghezza d'onda associata alle due ampiezze di probabilità (p è la quantità di moto degli elettroni), si ottiene (come nel caso della radiazione elettromagnetica) che la differenza di fase tra due cammini simmetrici rispetto alle due fenditure è data da

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta.$$

Se si suppone che sia $C_A = C_B$ si ottiene infine:

$$P = 4C_A^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

Il secondo membro di questa equazione è identico al termine che compare al secondo membro dell'equazione (9) per le onde elettromagnetiche ⁽¹²⁾.

⁽¹²⁾ In questa trattazione manca il termine diffrattivo dovuto alle singole fenditure. Esso, tuttavia, può essere ottenuto considerando la diffrazione di elettroni attraverso una sola fenditura.

TABELLA I. – *Descrizione maxwelliana e quantica dell'interferenza della radiazione elettromagnetica.*

Elettromagnetica	\Leftrightarrow	Quantica
$\lambda = c/\nu$	\Leftrightarrow	$\lambda = h/p$
Campo elettrico \vec{E}	\Leftrightarrow	Ampiezza di probabilità $\eta = Ce^{i\phi}$
$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$	\Leftrightarrow	$\eta = \eta_A + \eta_B$
Densità di energia $\propto E^2$	\Leftrightarrow	Probabilità $\propto \eta ^2$

Questa trattazione è assai istruttiva: essa mostra come possano venire “recuperate” grandezze fisiche “ondulatorie” come la lunghezza d’onda e la fase in una descrizione “corpuscolare”. Le entità fisiche in gioco sono particelle; la loro descrizione usa *anche* grandezze fisiche *ondulatorie*: anzi, sono proprio queste ultime che permettono una descrizione strutturalmente analoga a quella usata per le onde elettromagnetiche. Questa analogia strutturale è ancora più trasparente se applichiamo la trattazione di Feynmann ai fotoni, come mostrato nella tabella I.

Nel 1972, Donati, Missiroli e Pozzi, realizzano, presso l’Istituto di Fisica di Bologna, un esperimento di diffrazione di elettroni attraverso due fenditure [17]. La disposizione sperimentale è analoga a quella usata da Young per la luce [2]. Un fascio di elettroni monoenergetici di un microscopio elettronico è suddiviso in due fasci che interferiscono ⁽¹³⁾. L’intensità del fascio di elettroni era tale che “. . . la distanza media tra due elettroni che incidono sulla lastra finale è maggiore di 200 metri” e, quindi, *in media*, solo un elettrone alla volta attraversa l’apparato di misura. Questo esperimento appare quindi come una combinazione di quelli condotti, per la luce, da Young e Taylor (o Dempster e Batho). Successivamente, Merli, Missiroli e Pozzi ripetono l’esperimento variando il flusso di elettroni in modo da passare da una situazione in cui gli elettroni paiono arrivare in modo casuale sullo schermo di rivelazione, a quella in cui compaiono nitide frange di interferenza [18,19]. Questi esperimenti sono documentati in un affascinante film didattico [20] ⁽¹⁴⁾. In tempi più recenti (1989), un gruppo di ricercatori della Hitachi ha realizzato, con tecnologie più avanzate, un esperimento simile a quello del gruppo di Bologna (in cui però manca il passaggio dinamico mostrato dai ricercatori italiani) [21,22]. Entrambi gli esperimenti (di Bologna e Hitachi) mostrano che le frange di interferenza sono il prodotto dell’arrivo sullo schermo rivelatore di un un numero statisticamente significativo di *elementi discreti* (particelle). Entrambi i film [20,21] costituiscono un efficace strumento didattico: essi sono commentati in [23].

⁽¹³⁾ Il fascio elettronico passa attraverso due lastre metalliche collegate a Terra; tra le due lastre è posto un sottile filo conduttore mantenuto ad un potenziale $V \geq 0$ rispetto alle lastre. Il filo conduttore divide il fascio originario in due determinando una regione di sovrapposizione. Si ottiene così un effetto simile a quello prodotto, per la luce, dal “cartoncino” nell’esperimento di Young ($V = 0$) o da un doppio prisma di Fresnel ($V > 0$).

⁽¹⁴⁾ Il film fu prodotto dal Laboratorio Lamel del CNR di Bologna (ora non più esistente).

La spiegazione, da parte della teoria dei quanti di luce dei fenomeni sinora interpretati sulla base dell'ipotesi ondulatoria, quali l'interferenza, la diffusione, la dispersione ecc., appare come un'impresa molto impegnativa, e per realizzarla, sarà senza dubbio necessario fare un compromesso tra la vecchia teoria e la nuova, introducendo in questa la nozione di periodicità [24].

Louis de Broglie

8. Intermezzo

Parlando di interferenza di elettroni, non è affatto necessario introdurre alcun “dualismo” onda-particella. Questo modo di esprimersi è un (infelice) retaggio del dibattito che ha accompagnato la nascita della Meccanica Quantica. Sviluppiamo qui solo qualche riflessione. Nella trattazione svolta nella sezione precedente, l'elettrone è caratterizzato dalla grandezza fisica quantità di moto \vec{p} . L'uso della lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = p/h$ non ci autorizza a dire che, allora, *l'elettrone è un'onda*, dove *l'elettrone è un'onda* è un'asserzione ontologica riguardante il Mondo. Le asserzioni ontologiche affermano l'esistenza di qualche cosa: esse non discendono logicamente dalla conoscenza acquisita, anche se debbono essere compatibili con essa. Le asserzioni ontologiche fanno parte di una *Immagine del Mondo* caratterizzata dal fatto che contiene asserzioni ontologiche: come queste ultime, deve essere compatibile con la conoscenza acquisita (teorica e sperimentale), ma non discende logicamente da essa ⁽¹⁵⁾. Analogamente, è improprio affermare che l'elettrone si comporta come un'onda per il semplice motivo che usiamo nella sua descrizione grandezze fisiche tipiche delle onde, confondendo così caratteristiche di una descrizione con proprietà di oggetti del Mondo. Per quanto riguarda l'esperimento delle due fenditure condotto con elettroni, esso mostra che le frange di interferenza sono costruite dall'arrivo sullo schermo di un numero sufficientemente grande di *singoli elementi discreti* (elettroni): è quindi compatibile con i risultati di questo esperimento l'asserzione ontologica secondo cui l'elettrone è una particella ⁽¹⁶⁾. Tuttavia, non dobbiamo smarrire la consapevolezza che ogni Immagine del Mondo è solo *plausibile*. È quindi saggio non confondere la conoscenza acquisita basata su descrizioni teoriche e dati sperimentali, con le (talora fantasiose) Immagini del Mondo che popolano la letteratura scientifica ⁽¹⁷⁾. Come si

⁽¹⁵⁾ Il lettore interessato ad approfondire questi argomenti può vedere [25].

⁽¹⁶⁾ Analogamente, la formazione “per punti” delle figure di interferenza ottenute con sorgenti di luce deboli o con sorgenti che emettono un fotone alla volta (o quasi [11]), mostra che la luce è composta da *elementi discreti* (fotoni) il cui comportamento statistico è descritto dal *formalismo ondulatorio maxwelliano* o da quello quantico basato sulle ampiezze di probabilità.

⁽¹⁷⁾ È mia opinione che il dibattito sulla Meccanica Quantica sia stato caratterizzato da un intreccio metodologicamente improprio tra fisica e filosofia. Tale intreccio ha, tra l'altro, inestricabilmente mescolato conoscenza acquisita e Immagini del Mondo creando contesti in cui asserzioni filosofiche sono considerate suscettibili di verifiche sperimentali. Si è smarrita (o non si è mai avuta) la consapevolezza che nessuna teoria fisica discende logicamente da una filosofia; e che, di conseguenza, gli esperimenti confutano, talvolta, una teoria, ma mai una filosofia. Un intreccio improprio tra Immagini del Mondo e conoscenza acquisita inserisce elementi di irrazionalità nelle descrizioni

esprimeva, peraltro con eccessiva permissività, Hertz: “Ma l’accuratezza scientifica richiede saggiamente di non confondere la semplice e familiare figura, che ci è presentata dalla natura, con i brillanti ornamenti con cui eravamo abituati a vestirla. Di nostro arbitrio non possiamo in alcun modo modificare la prima; possiamo invece scegliere come ci piace il taglio ed il colore degli altri” [26].

9. Applicazioni e sviluppi

Oggi, le tecniche basate sulla diffrazione di raggi X, elettroni, neutroni, atomi e molecole costituiscono strumenti di indagine quotidiana. L’intervallo di tempo che separa la prima osservazione sperimentale del fenomeno dalla sua applicazione tecnica diffusa costituisce un interessante capitolo di storia della fisica e del suo intreccio con la tecnologia ⁽¹⁸⁾.

9.1. Diffrazione di raggi X

Nel 1912 Max von Laue suggerì che i raggi X possono essere diffratti dai cristalli perché la lunghezza d’onda dei raggi X può essere dello stesso ordine di grandezza della distanza interatomica nei cristalli. Nello stesso anno, von Laue pubblica, insieme a due suoi giovani collaboratori, la prima figura di diffrazione ottenuta con raggi X e cristalli di solfuro di zinco (ZnS). Questa scoperta ha rapidamente condotto allo studio della struttura dei cristalli mediante diffrazione di raggi X ⁽¹⁹⁾.

9.2. Diffrazione di elettroni

Dopo la scoperta da parte di Davisson e Germer e G. P. Thomson verso la fine degli anni venti del secolo scorso, le tecniche di indagine si sono sviluppate lungo diverse direttrici. Nei microscopi elettronici a trasmissione, il materiale oggetto di studio è attraversato dal fascio elettronico e le figure di diffrazione osservate su uno schermo fluorescente od una lastra fotografica. Questa tecnica usa elettroni ad alta energia (anche dell’ordine del centinaio di keV) ⁽²⁰⁾. La diffrazione di elettroni di bassa energia (< 100 eV) richiede l’uso di vuoti molto spinti ed una preparazione accurata della superficie del campione. Si è sviluppata a partire dagli anni sessanta del secolo scorso. Una variante di questa tecnica prevede l’uso di elettroni più energetici e incidenti sul campione ad angoli radenti.

scientifiche (o presunte tali) con grave danno all’immagine della scienza e conseguente rafforzamento di tendenze irrazionali, magiche o superstiziose.

⁽¹⁸⁾ Purtroppo, questo “capitolo” non è molto frequentato dagli storici della scienza.

⁽¹⁹⁾ L’*International Union of Crystallography* ha pubblicato in rete una pregevole rassegna riguardante l’uso di questa tecnica [27]. Per una trattazione elementare della diffrazione di raggi X da parte di solidi cristallini, si può vedere [28].

⁽²⁰⁾ Per una rassegna, si può vedere [29].

9.3. Diffrazione di neutroni

A differenza dei raggi X e degli elettroni che interagiscono, essenzialmente, con gli elettroni del campione, i neutroni interagiscono con i nuclei e, magneticamente, con i dipoli magnetici atomici. L'uso della diffrazione di neutroni per lo studio delle proprietà dei materiali si è sviluppata a partire dalla fine della seconda guerra mondiale [30,31].

9.4. Diffrazione di atomi e interferometria atomica

Il primo esperimento di diffrazione con atomi fu realizzato nel 1930 da Estermann e Stern facendo incidere un fascio di atomi di elio su un cristallo di fluoruro di litio [32]. Nel caso di esperimenti di interferometria, la trattazione teorica è analoga a quella svolta in precedenza per gli elettroni (e per i fotoni); si deve però tenere conto del fatto che la fase che compare nell'ampiezza di probabilità dipende dalle interazioni cui è sottoposta la particella. Ciò non deve sorprendere. Per esempio, nel caso di fotoni che si propagano in un mezzo materiale, la differenza di fase tra due cammini diversi dipende anche dall'indice di rifrazione del mezzo. Nel caso degli atomi la differenza di fase dovuta all'interazione assume l'espressione $\Delta\phi = U\Delta t/\hbar$, dove U è l'energia di interazione, e Δt la durata dell'interazione. L'interferometria atomica presenta, tuttavia, problemi sperimentali formidabili: si tratta infatti di costruire interferometri "adatti" agli atomi. Nel caso dei fotoni, si possono usare specchi per deflettere un fascio o specchi semi-argentati per dividere un fascio in due; si può operare in aria e il flusso di fotoni è elevato ($10^{16}/s$). Elettroni e neutroni passano attraverso i cristalli; gli elettroni possono essere deviati da campi elettrici e magnetici statici: è quindi possibile costruire elementi "ottici" sia per gli elettroni ⁽²¹⁾ che per i neutroni (per questi ultimi, gli strumenti ottici sono "per trasmissione"). Nel caso degli atomi il flusso è basso ($10^9/s$) o $10^5/s$, se si usano condensati di Bose-Einstein ⁽²²⁾. Gli atomi tendono ad attaccarsi ad una superficie, invece di attraversarla o rimbalzargli contro; pertanto, è necessario usare reticoli di diffrazione al posto di specchi o di specchi semi-argentati: e i reticoli debbono essere costruiti artificialmente (anche per la difficoltà aggiuntiva di allineare in sequenza con la tolleranza richiesta diversi cristalli). Queste difficoltà hanno ostacolato lo sviluppo della interferometria atomica sin verso la metà degli anni ottanta del secolo scorso. Poi l'uso di laser e delle nano-tecnologie hanno permesso di costruire due tipi di reticoli di diffrazione per gli atomi: onde elettromagnetiche stazionarie (laser); sottili reticoli di diffrazione per trasmissione (nano-tecnologie).

Per una rassegna su questi sviluppi e le possibili applicazioni si può vedere [34].

10. Anche con oggetti macroscopici...

Nell'ottobre del 2006 è apparso su *Physical Review Letters* un lavoro intitolato *Single Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale* [35].

⁽²¹⁾ Si pensi, per esempio, al microscopio elettronico.

⁽²²⁾ Per una rassegna sui condensati di Bose-Einstein si può vedere [33].

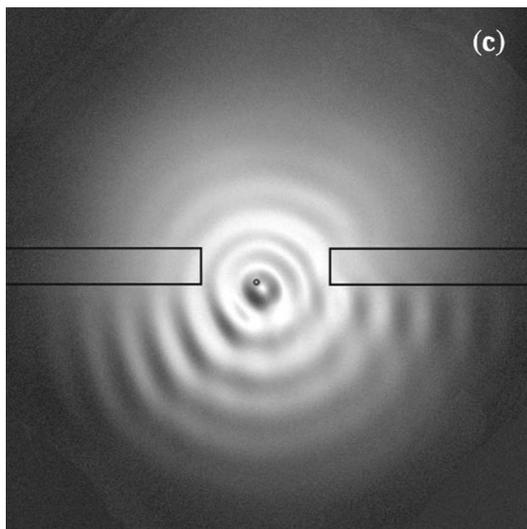


Fig. 4. – Fotografia di un *walker* —una goccia con un’onda associata— (si veda il testo) che passa attraverso una fenditura. Figura 1c riprodotta con licenza da: COUDER Y. and FORT E., *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006) 154101. Copyright (2006) by the American Physical Society.

Protagonista di questi esperimenti è il *walker* (così chiamato dagli autori): una goccia di *silicon oil* che, cadendo su *silicon oil* contenuto in una bacinella, genera —in condizioni particolari— un’onda su cui essa viaggia (fig. 4).

Se, in numero sufficientemente elevato, i *walker* sono lanciati, uno alla volta, perpendicolarmente verso una fenditura —mantenendo *apparentemente* invariate le condizioni iniziali— si osserva che il percorso di ogni singolo *walker* appare come casuale. Inizialmente la traiettoria è rettilinea, si distorce nei pressi della fenditura, ridiventa rettilinea dopo la fenditura: l’angolo formato tra i due tratti rettilinei — prima e dopo la fenditura— è l’angolo di deviazione α . Tuttavia, osservando l’arrivo dei *walker* ad una distanza sufficientemente grande dalla fenditura (quando la loro traiettoria è ritornata rettilinea) e riportando in un grafico il numero di *walker* in funzione dell’angolo di deviazione α , si ottiene l’istogramma della fig. 5. L’istogramma è ragionevolmente interpolato dall’equazione

$$(10) \quad f(\alpha) = A \left| \frac{\sin(\pi L/\lambda_F \sin \alpha)}{\pi L/\lambda_F \sin \alpha} \right|,$$

dove L è la larghezza della fenditura, λ_F la lunghezza d’onda dell’onda del *walker* e α l’angolo di deviazione. La (10) è l’ampiezza risultante di un’onda piana diffratta da una fenditura. Ripetendo l’esperimento con due fenditure si trova che l’istogramma sperimentale è ragionevolmente interpolato dall’equazione

$$(11) \quad f(\alpha) = A \left| \frac{\sin(\pi L/\lambda_F \sin \alpha)}{\pi L/\lambda_F \sin \alpha} \cos(\pi d/\lambda_F \sin \alpha) \right|,$$

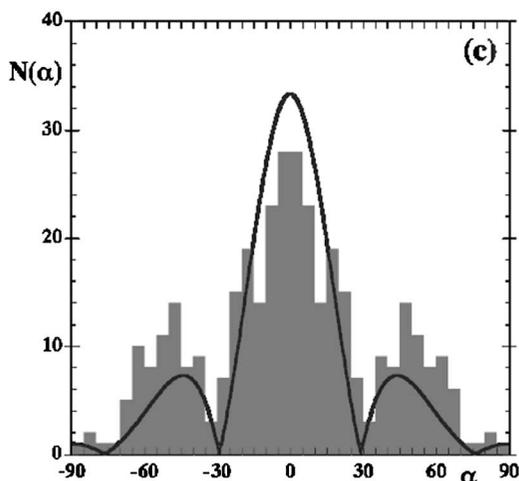


Fig. 5. – Istogramma ottenuto con 125 *walker* passati uno alla volta attraverso una fenditura. ($L = 14.7$ mm; $\lambda_F = 6.95$ mm; $L/\lambda_F = 2.11$). La curva continua è l'interpolazione dell'eq. (10) in cui si è posto $L/\lambda_F = 1.96$. Figura 2c riprodotta con licenza da: COUDER Y. and FORT E., *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006) 154101. Copyright (2006) by the American Physical Society.

dove d è la distanza tra due punti omologhi delle due fenditure. La (11) è l'ampiezza risultante di un'onda piana diffratta da due fenditure. Ogni goccia passa attraverso una o l'altra fenditura; tuttavia, l'onda ad esso associata passa attraverso entrambe le fenditure e l'interferenza delle onde risultanti è responsabile della traiettoria della goccia.

È un esperimento suggestivo: si sono ottenute figure di interferenza con oggetti macroscopici; si è prodotto un ente —il *walker*— costituito da una goccia con un'onda associata. Lasciamo al lettore il compito di trovare analogie e differenze con i fenomeni interferenziali discussi in precedenza (analogie e differenze peraltro delineate in [35]). Tuttavia, si suggerisce una saggia cautela nel cedere alla tentazione di percorrere *a ritroso* l'analogia usata da Thomas Young... (g.g.)

* * *

Ringrazio PIER GIORGIO MERLI, GIANFRANCO MISSIROLI, GIULIO POZZI, e ROSA MARIA SPERANDEO, per i loro preziosi suggerimenti di modifica e integrazione del testo originario.

Bibliografia

- [1] YOUNG T., citato da WHITTAKER E., *A History of the Theories of Aether and Electricity* (Nelson and Sons, London) 1951, p. 101.
- [2] YOUNG T., *Philos. Trans. R. Soc.*, **91** (1804) 1.
- [3] Rif. [2], p. 1. In rete all'interno dell'archivio: <http://gallica.bnf.fr/>.
- [4] SCHEIDER W., *Phys. Teach.*, **24** (1986) 217. Anche in rete alla pagina <http://www.cavendish-science.org/phys/tyoung/tyoung.htm>.
- [5] GIULIANI G. e BONIZZONI I., *Lineamenti di elettromagnetismo* (La Goliardica Pavese, Pavia) 2004, pp. 159-176.

- [6] MAXWELL J. C., voce *Etere*, *Enciclopedia Britannica*, Vol. **VIII**, 1875, pp. 568-572.
- [7] <http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/pdf/interferometri.pdf>.
- [8] TAYLOR G. I., *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **15** (1909) 114.
- [9] Rif. [8], p. 114.
- [10] DEMPSTER A. J. e BATHO H. F., *Phys. Rev.*, **30** (1927) 644.
- [11] JACQUES V. *et al.*, *Eur. Phys. J. D*, **35** (2005) 561. In rete alla pagina <http://www.edpsciences.org/articles/epjd/pdf/2005/10/d05194.pdf>.
- [12] DAVISSON C. e GERMER L. H., *Phys. Rev.*, **30** (1927) 705; DAVISSON C., *Nobel Lecture*, alla pagina: http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1937/davisson-lecture.html.
- [13] THOMSON G. P., *Proc. R. Soc.*, **117** (1928) 600; *Nobel Lecture*, alla pagina: http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1937/thomson-lecture.html.
- [14] POZZI G., MISSIROLI G. F. e MERLI P. G., *G. Fis.*, **15** (1974) 163.
- [15] FEYNMAN R., LEIGHTON R. e SANDS M., *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. **II** (Addison-Wesley, Reading) 1963, pp. 15-7, 15-14.
- [16] JÖNSSON C., *Z. Phys.*, **161** (1961) 454. Traduzione parziale in inglese in: *Am. J. Phys.*, **42** (1974) 4.
- [17] DONATI O., MISSIROLI G. F. e POZZI G., *Am. J. Phys.*, **41** (1973) 639.
- [18] MERLI P. G., MISSIROLI G. F. e POZZI G., *Am. J. Phys.*, **44** (1976) 306.
- [19] MERLI P. G., MISSIROLI G. F. e POZZI G., *G. Fis.*, **17** (1976) 83.
- [20] MERLI P. G., MISSIROLI G. F. e POZZI G., *Electron Interference Movie*, http://lotto.bo.imm.cnr.it/educational/main_educational.php.
- [21] *Double-slit experiment*, <http://www.hqrd.hitachi.co.jp/em/doubleslit.cfm>.
- [22] TONOMURA A., ENDO J., MATSUDA T., KAWASAKI T. e EZAWA H., *Am. J. Phys.*, **57** (1989) 117.
- [23] RODGERS P., *The double slit experiment*, alla pagina: <http://physicsweb.org/articles/world/15/9/1>.
- [24] DE BROGLIE L., *Compt. Rend.*, **175** (1922) 811.
- [25] Rif. [5], pp. 1-12. GIULIANI G., *Which Realism?*, alla pagina <http://fiscavolta.unipv.it/percorsi/pdf/quale.pdf>.
- [26] HERTZ H., *Electric Waves* (Dover Publications, New York) 1962, p. 28. Ristampa della prima edizione inglese del 1893.
- [27] EWALD P. P. (Editore), *Fifty Years of X-Ray Diffraction*, alla pagina <http://www.iucr.org/iucr-top/publ/>.
- [28] Rif. [5], pp. 176-179.
- [29] BENDERSKY L. A. e GAYLE F. W., *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, **106** (2001) 997; <http://www.nist.gov/jres>.
- [30] SHULL C. G., *Nobel Lecture*, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1994/shull-lecture.html.
- [31] BROCKHOUSE B. N., *Nobel Lecture*, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1994/brockhouse-lecture.html.
- [32] ESTERMANN I. e STERN A., *Z. Phys.*, **61** (1930) 95.
- [33] CORNELL E. A. e WIEMAN C. E., *Nobel Lecture*, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2001/cornellwieman-lecture.pdf; KETTERLE W., *Nobel Lecture*, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2001/ketterle-lecture.pdf.
- [34] PRITCHARD D. E., CRONIN A. D., GUPTA S. e KOKOROWSKI D. A., *Ann. Phys. (Leipzig)*, **10** (2001) 35.
- [35] COUDER Y. e FORT E., *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006) 154101; <http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=PRLTA00000970000154101000001&idtype=cvips&gifs=yes>.