



“Quantistica”

Un nuovo capitolo della Fisica

particella

onda

energia

$$E = hf$$

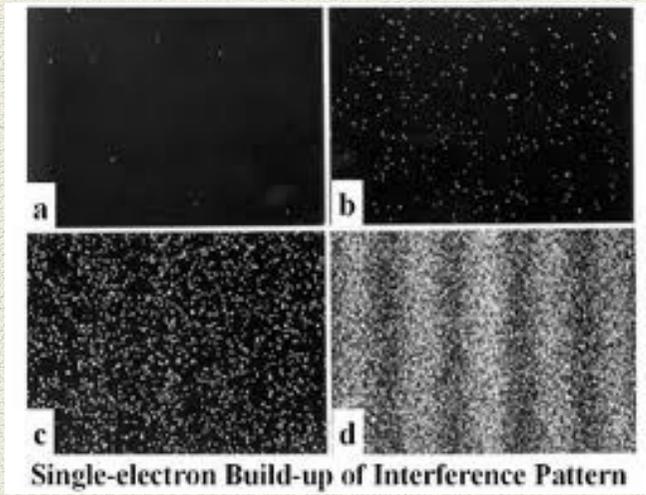
frequenza

quantità di moto

$$p = h/\lambda$$

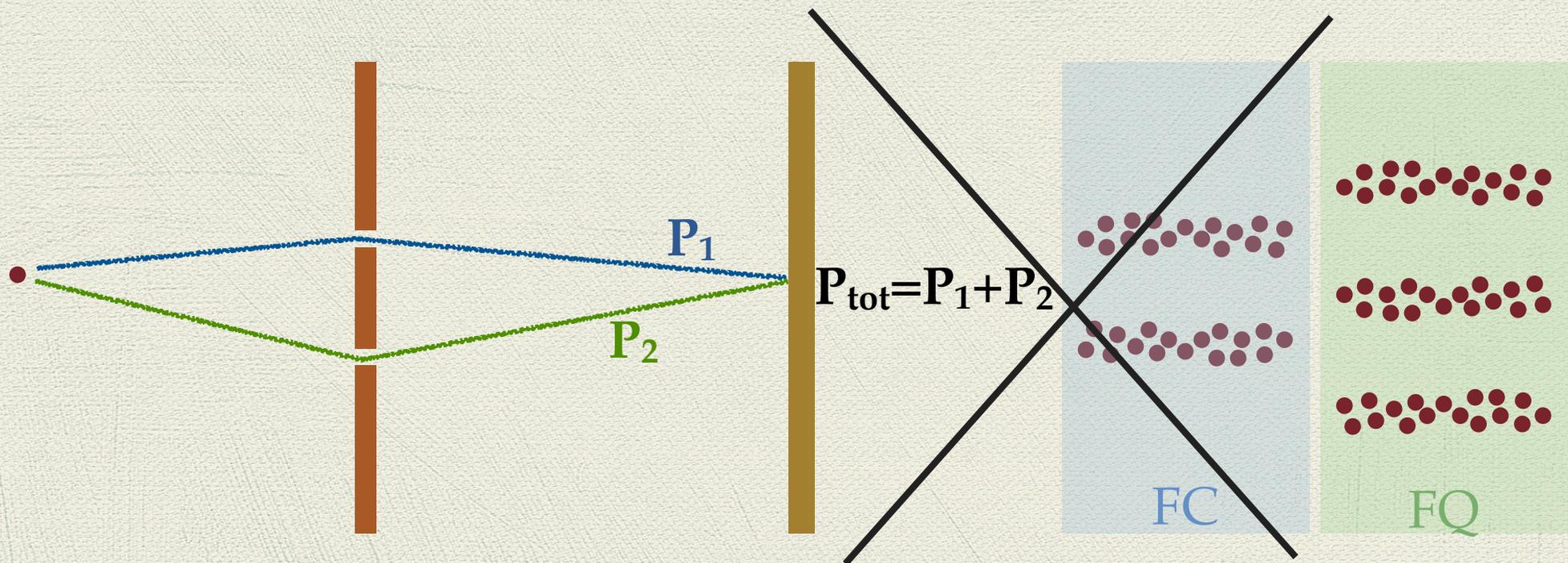
lunghezza d'onda





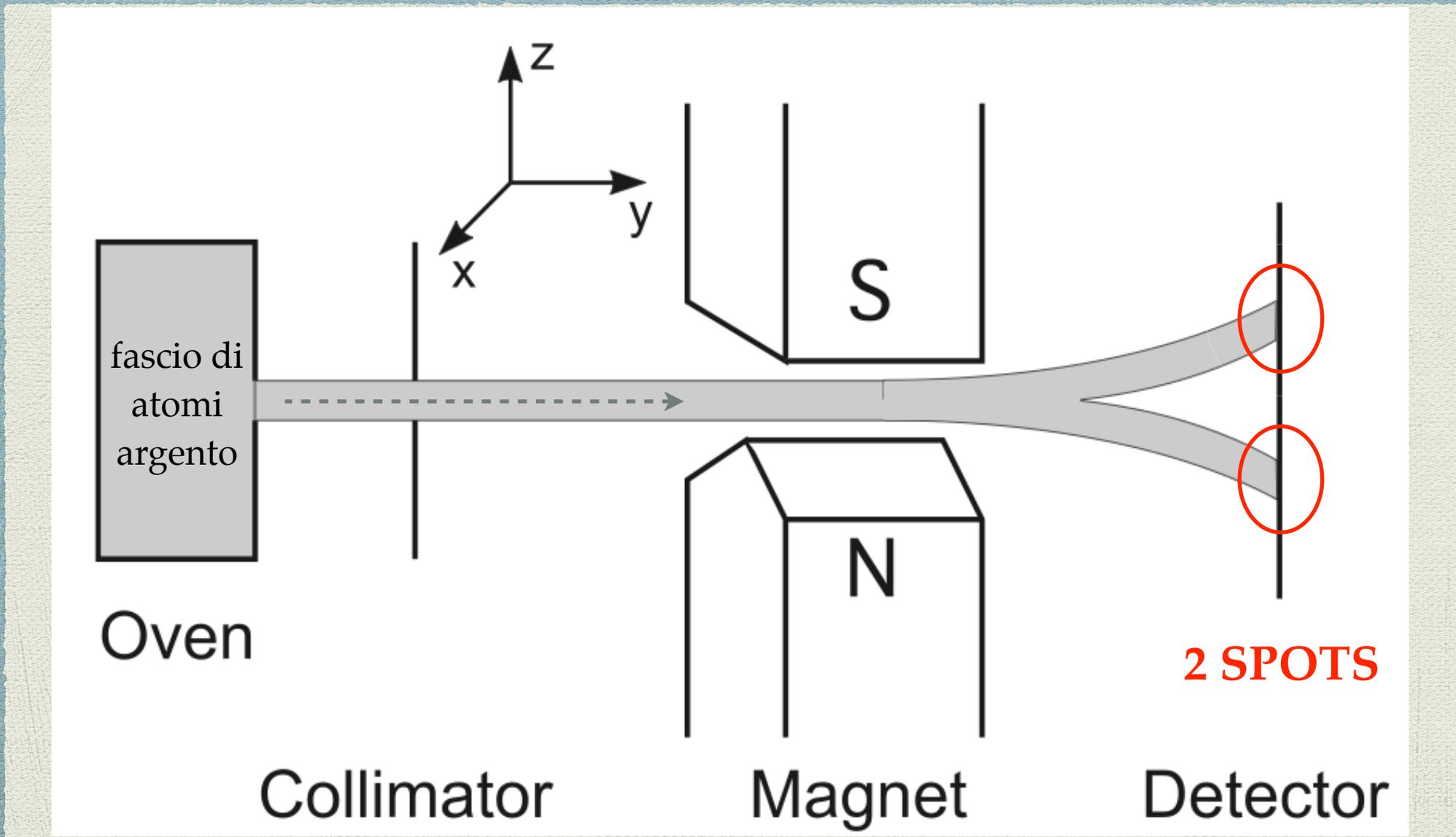
Problema intrinsecamente PROBABILISTICO:

- ☼ non possiamo prevedere a priori dove arriva il singolo elettrone
 - ☼ la figura d'interferenza si ricostruisce all'arrivo di molti elettroni
- (probabilità è epistemica in FC e ontologica in FQ)



Dal concetto di PROBABILITA' a quello di AMPIEZZA di PROBABILITA'

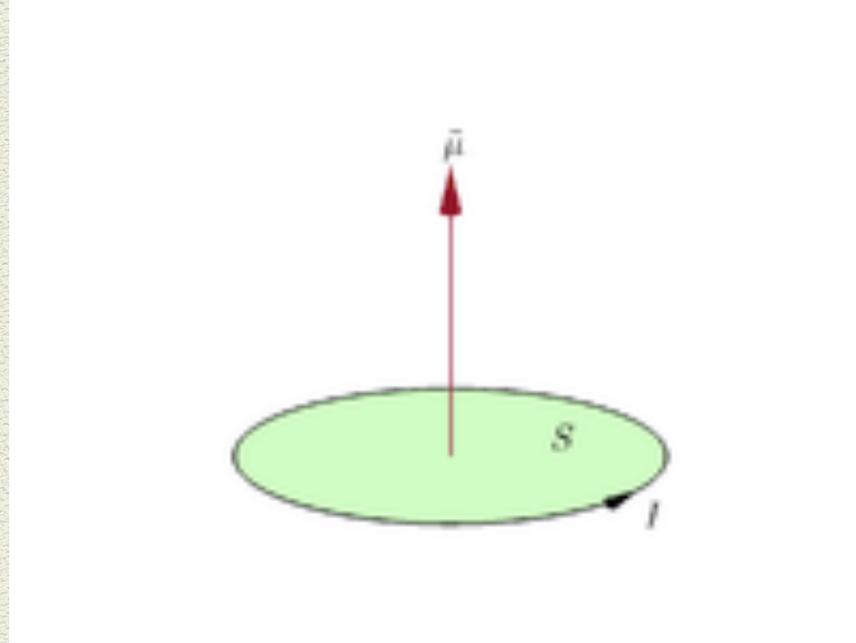
L'esperimento di Stern e Gerlach



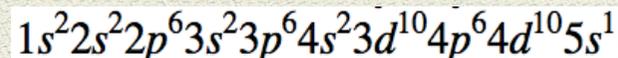
Interazione tra atomi neutri e campo magnetico dovuta al fatto che gli atomi di argento hanno un momento magnetico non nullo

Spira percorsa da corrente

$$\vec{\mu} = IS\hat{n}$$



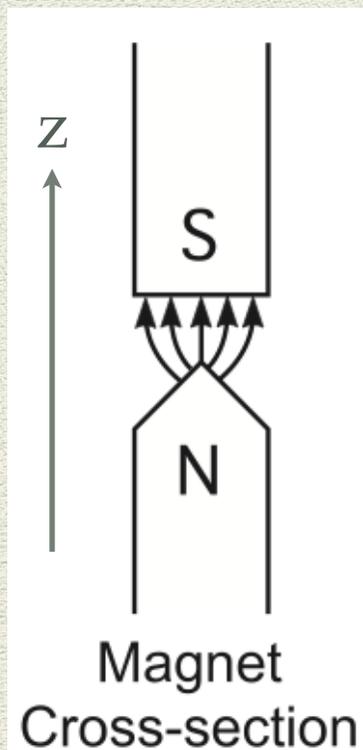
Ag: 47 protoni, 60 / 62 neutroni, 47 elettroni



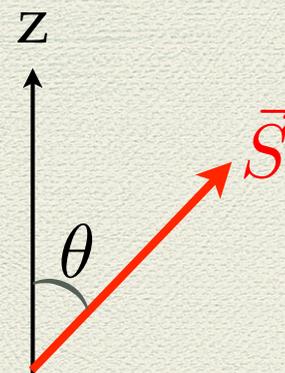
hanno un momento magnetico totale non nullo dovuto allo spin (mom. magnetico intrinseco) dell'elettrone $5s^1$

$$\vec{\mu} = -\frac{ge}{2m_e} \vec{S}$$

Magnete genera un campo magnetico NON uniforme lungo z , che provoca una forza sugli atomi con mom. magn. non nullo



$$F_z = -\frac{ge}{2m_e} S_z \frac{dB_z}{dz} = \text{const.} \frac{dB_z}{dz} S \cos \theta$$



Il magnete dovrebbe deviare gli atomi in maniera proporzionale al coseno dell'angolo e sul detector si dovrebbe vedere una distribuzione continua

Invece: si vedono solo **DUE SPOTS**

corrispondenti a due ben precisi valori dello spin (up e down)

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2} \quad \hbar = h/2\pi = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

L'apparatore di S.G. è in grado di separare i due possibili valori dello spin: **ANALIZZATORE**

Inoltre siamo portati a dire che metà atomi hanno spin su e metà spin giù (attenzione, vedremo dopo che non è così!).

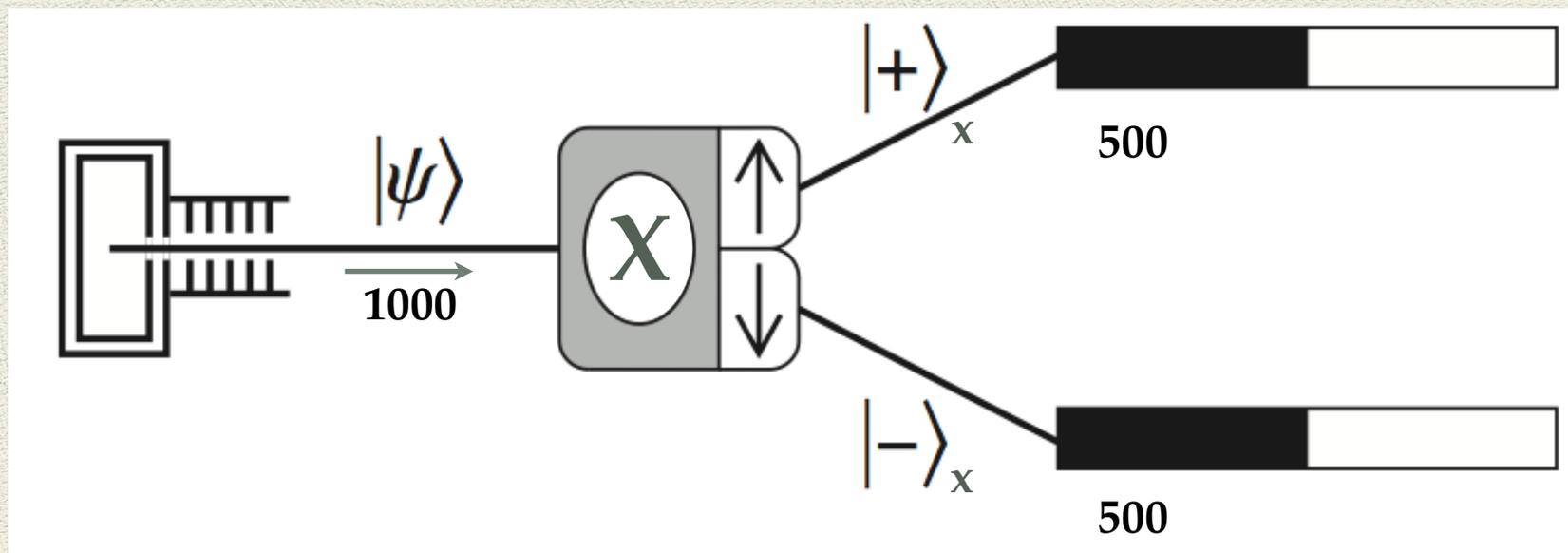
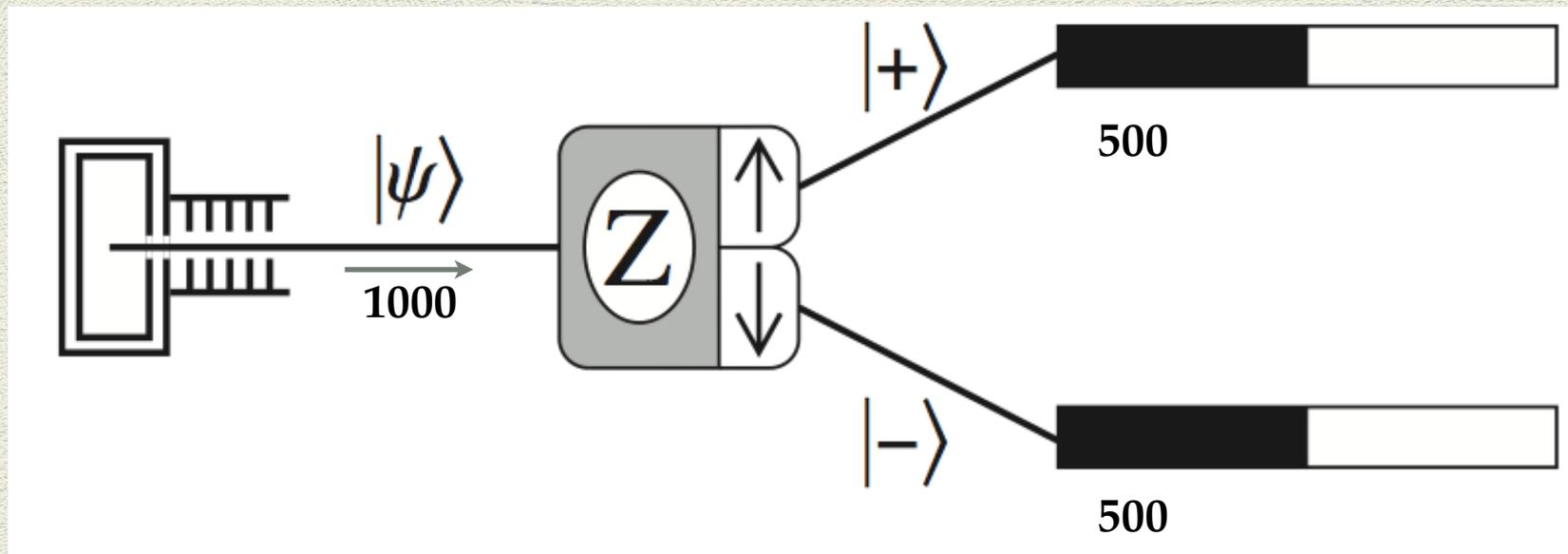
N.B. Quello che andremo a vedere dipende solo dal fatto che la quantità che andiamo a studiare (grandezza osservabile) ha solo due possibili valori: spin (up/down), polarizzazione del fotone (orizzontale/verticale), passaggio attraverso due fenditure ...

Cosa succede se facciamo arrivare solo un atomo alla volta?

- Ogni atomo arriva o nello spot superiore o in quello inferiore (gli atomi non si perdono)
- Ogni atomo arriva in uno e un solo spot (gli atomi non si dividono in due)
- Diremo che l'atomo è descritto da uno STATO $|\psi\rangle$ che rappresenta il suo spin e che può assumere (al momento della misura) solo due valori: $s_u = |+\rangle$ oppure $s_d = |-\rangle$
- Se ripeto l'esperimento con molti atomi, in media metà atomi vengono deviati nello spot superiore e metà in quello inferiore: diremo che un atomo ha il 50% di probabilità di essere rivelato con spin su e il 50% con spin giù

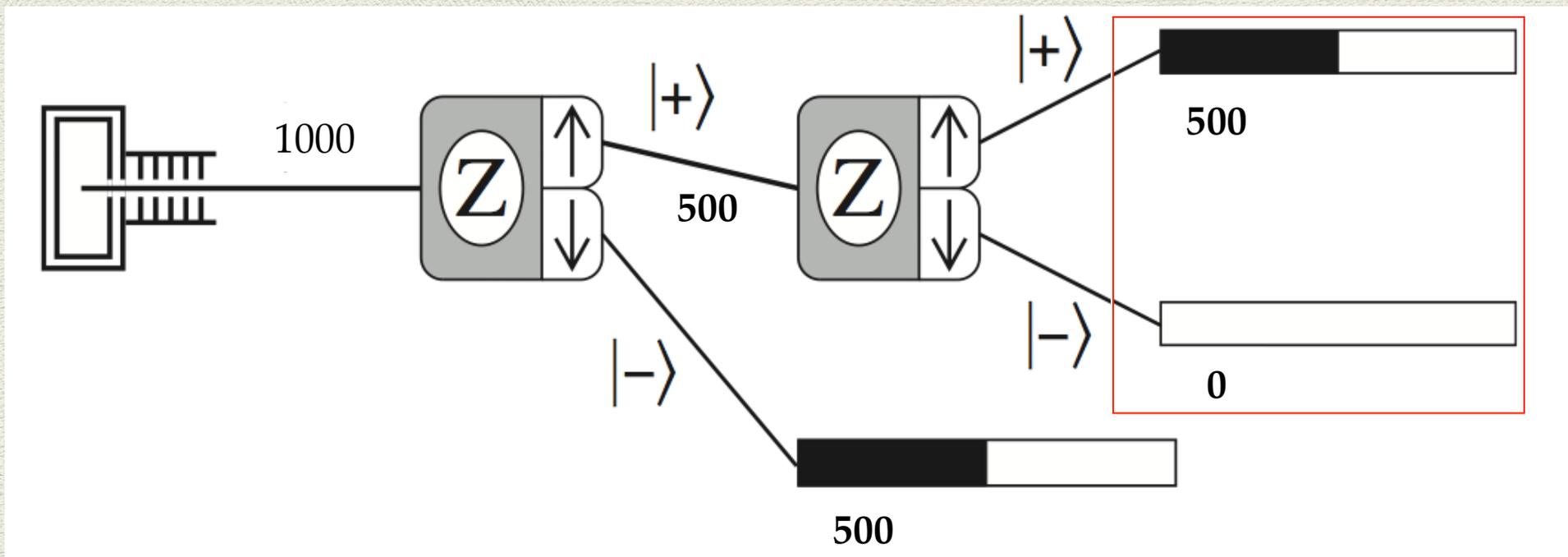
Esperimento 0

- si manda un fascio di 1000 atomi (con spin S)
- si mandano 1000 atomi (con spin S) uno alla volta



Esperimento 1

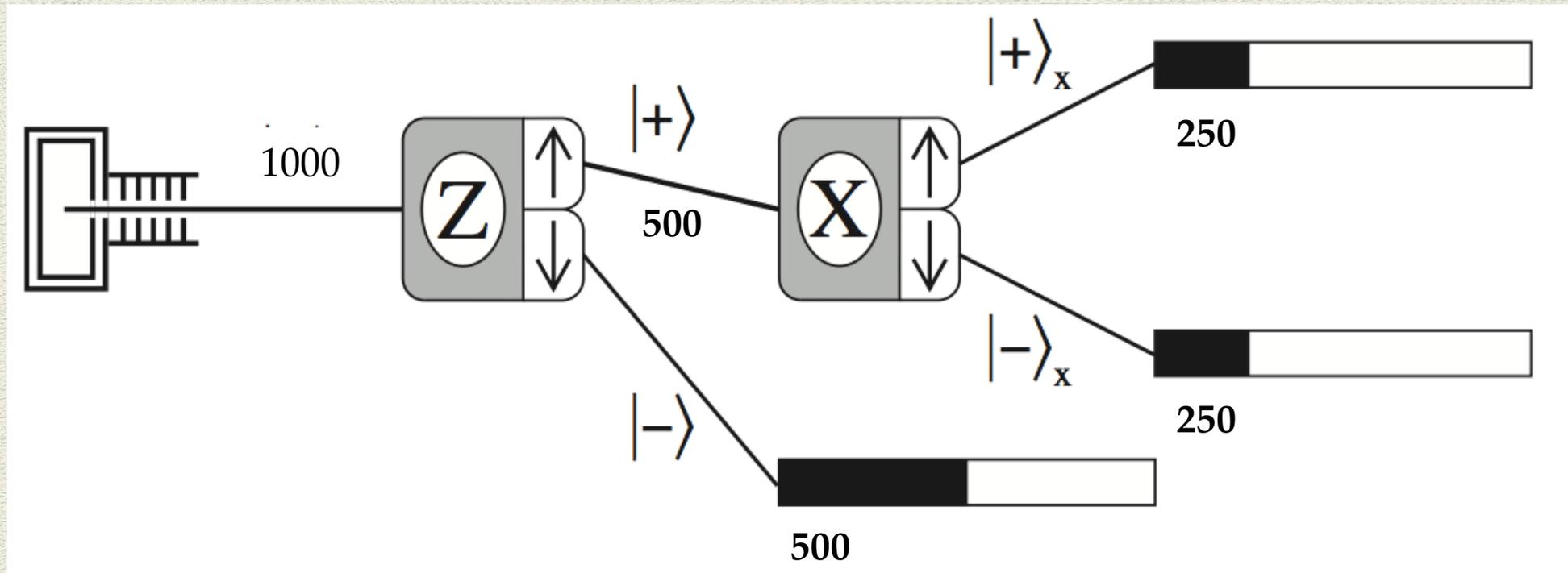
ci sono ora due apparati, il secondo, sempre diretto lungo l'asse z , analizza uno dei due fasci in uscita dal primo



Il primo apparato PREPARA il sistema in uno dei due possibili stati: siamo sicuri che tutti gli atomi del fascio superiore sono del tipo $|+\rangle$ e quelli del fascio inferiore del tipo $|-\rangle$

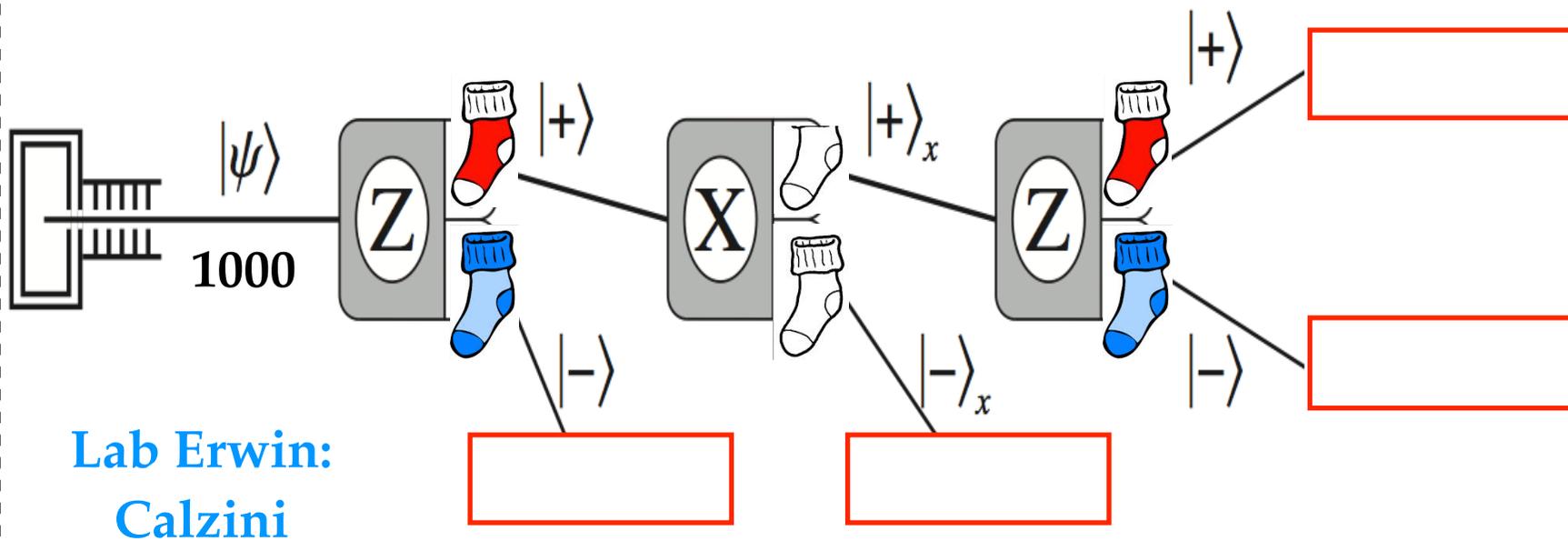
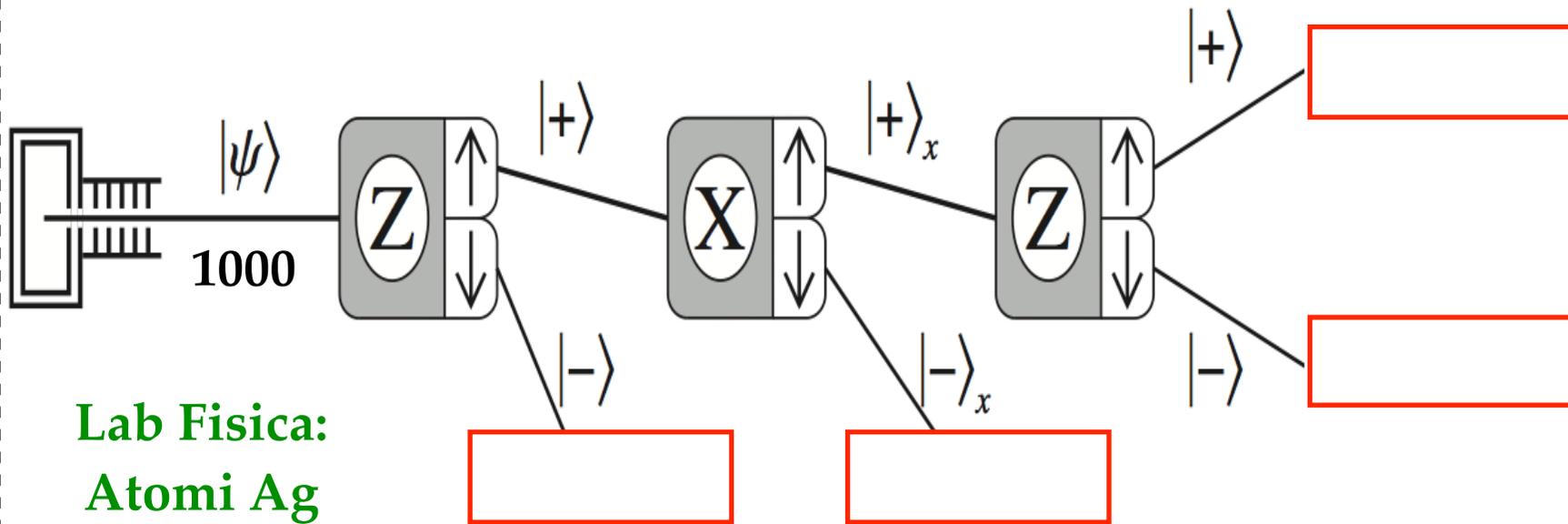
Esperimento 2

ci sono due apparati, il secondo ora è diretto lungo un altro asse, per esempio x



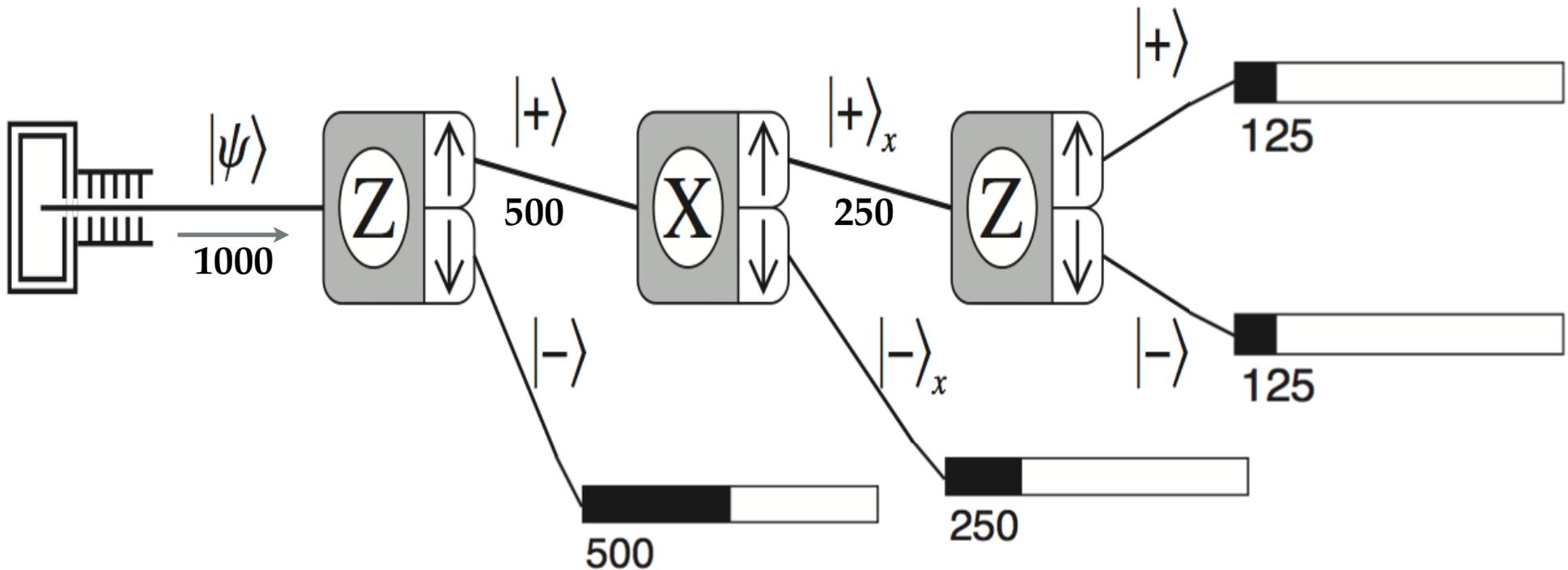
Il secondo apparato, in direzione perpendicolare, fa passare tutto il fascio $|+\rangle = |+\rangle_z$, al 50% in alto ($|+\rangle_x$) e al 50% in basso ($|-\rangle_x$)

Esperimento 3: Esercizio



Esperimento 3

ci sono ora tre apparati, nelle direzioni Z, poi X poi ancora Z

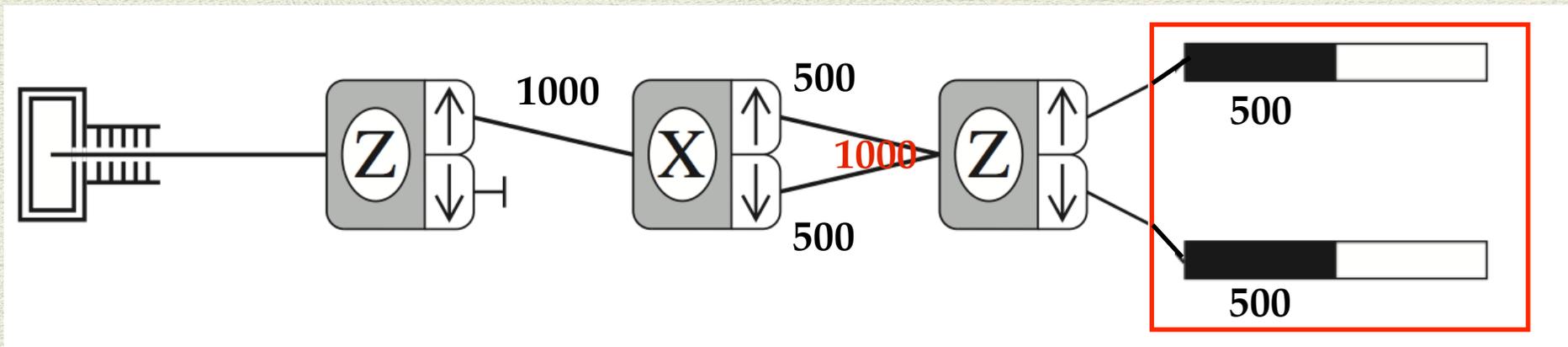


Osservazione. Il secondo apparato ha “disturbato” il sistema. In entrata avevamo solo atomi $|+\rangle$, ma in uscita abbiamo metà e metà, come dimostra l’azione del terzo apparato.

Esperimento 4

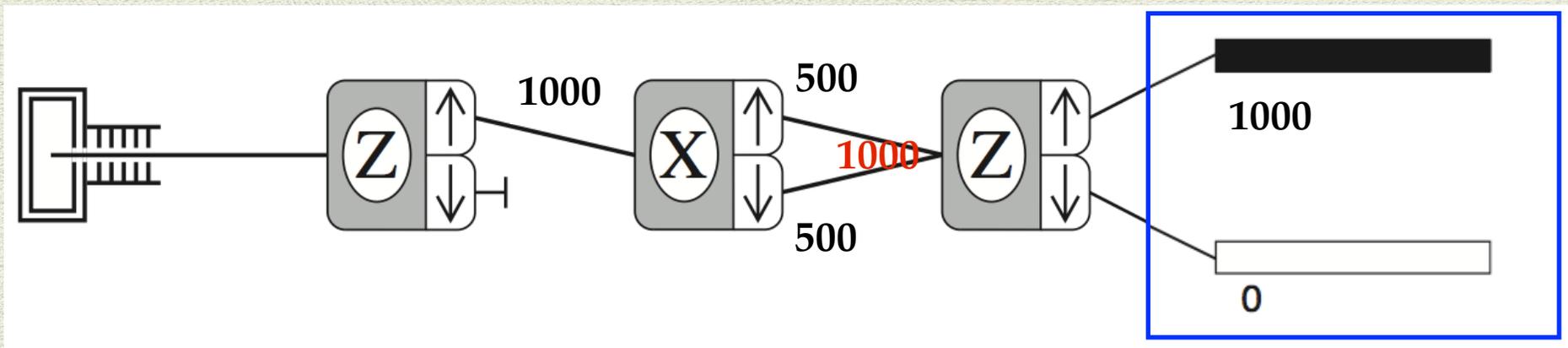
sempre con tre apparati in successione, Z, X e poi Z

Ci aspettiamo ...



Esperimento 4

sempre con tre apparati in successione, Z, X e poi Z



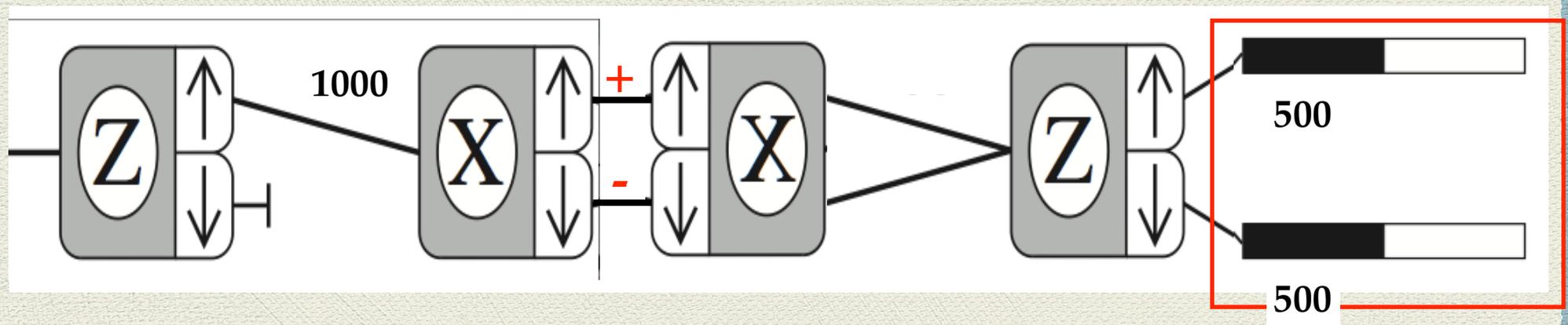
Invece ... !!!

Esperimento 5

mettiamo 4 apparati: nell'ordine Z, X, X, Z

con il secondo X rovesciato in modo che i due fasci si ricombinino

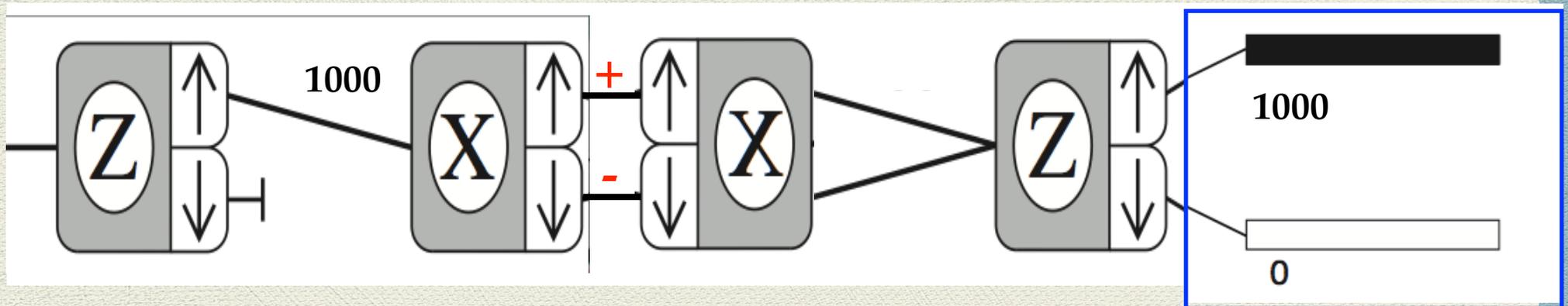
Ci aspettiamo ...



Esperimento 5

mettiamo 4 apparati: nell'ordine Z, X, X, Z

con il secondo X rovesciato in modo che i due fasci si ricombinino



Invece ... !!!

Interpretazione Fisica

Secondo la FC, che spin ha il singolo atomo tra i due apparati X?

☞ **ENTRAMBI** i valori + o - :

non è un'alternativa accettabile poichè tutti gli esperimenti ci dicono che un singolo atomo non può spezzarsi in due

☞ **NESSUNO** dei due valori:

anche questa non è un'alternativa accettabile poichè tutti gli esperimenti ci dicono che gli atomi non si perdono per strada

☞ lo spin + **OPPURE** lo spin -:

questo è quanto abbiamo supposto nel ragionamento precedente che è però contraddetto dall'esperimento

Come si può uscire da questa empasse logica?

Osservazione. Abbiamo tacitamente considerato equivalenti le affermazioni:

il detector rileva un atomo con spin + o con spin -



tra i due X, l'atomo era $|+\rangle$ o $|-\rangle$

Ma se ora supponiamo che, tra i due apparati X, l'atomo non sia in particolare in nessuno delle combinazioni possibili per la logica classica ma in uno stato di **SOVRAPPOSIZIONE**:

$$“ |+\rangle + |-\rangle ”$$

e che ci risulti essere in $|+\rangle$ o in $|-\rangle$ solo quando lo facciamo passare attraverso l'ultimo apparato Z?

Chiariamo questo concetto in termini probabilistici:

l'atomo è nello stato

$|+\rangle$

$|-\rangle$

$|+\rangle + |-\rangle$

è equivalente a

l'atomo ha probabilità

1 di avere spin su

1 di avere spin giù

1/2 di avere sia spin su che giù

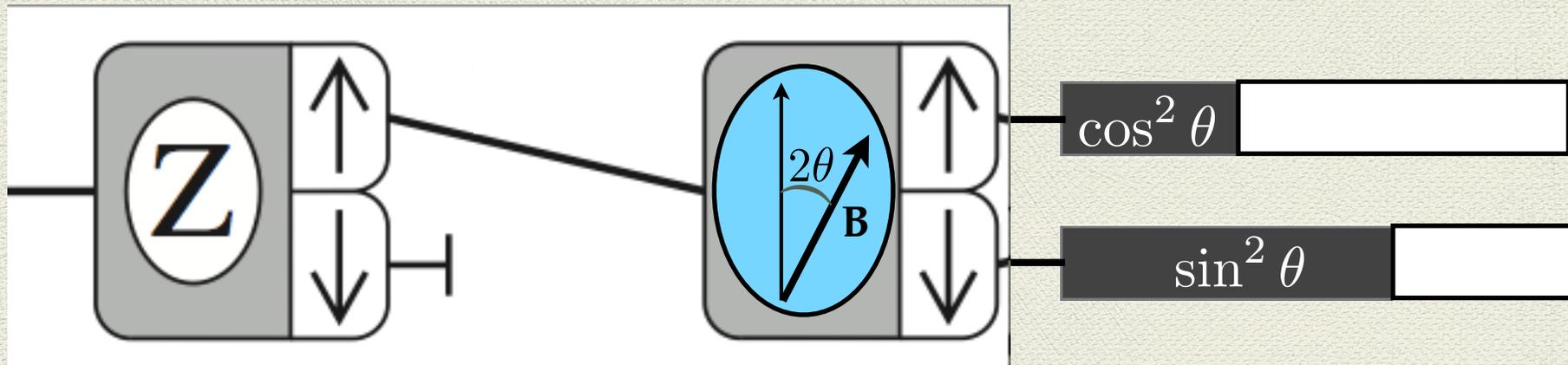
In altre parole, l'atomo nello stato $|+\rangle + |-\rangle$ non ha: nè solo spin su, nè solo spin giù, nè entrambi.

- lo STATO dell'atomo prima di essere rivelato non è ben definito in termini delle alternative classiche;
- di esso possiamo solo dire che le due alternative sono entrambe possibili *prima della misura*, entrambe con la medesima probabilità 1/2;
- l'atomo "sceglie" di esser + ovvero - solo quando viene *misurato*

Generalizzazione.

invece di X , mettiamo un apparato SG ad un angolo 2θ rispetto l'asse Z

Le probabilità di passaggio nel cammino superiore e inferiore non sono più $1/2$ ciascuna, ma è proporzionale al coseno/seno al quadrato dell'angolo, come illustrato in figura:



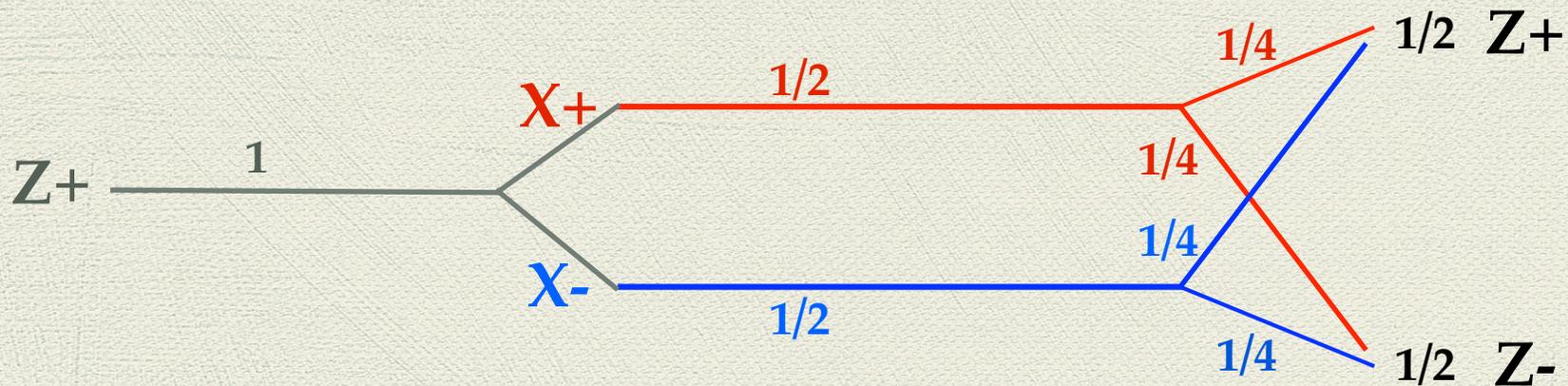
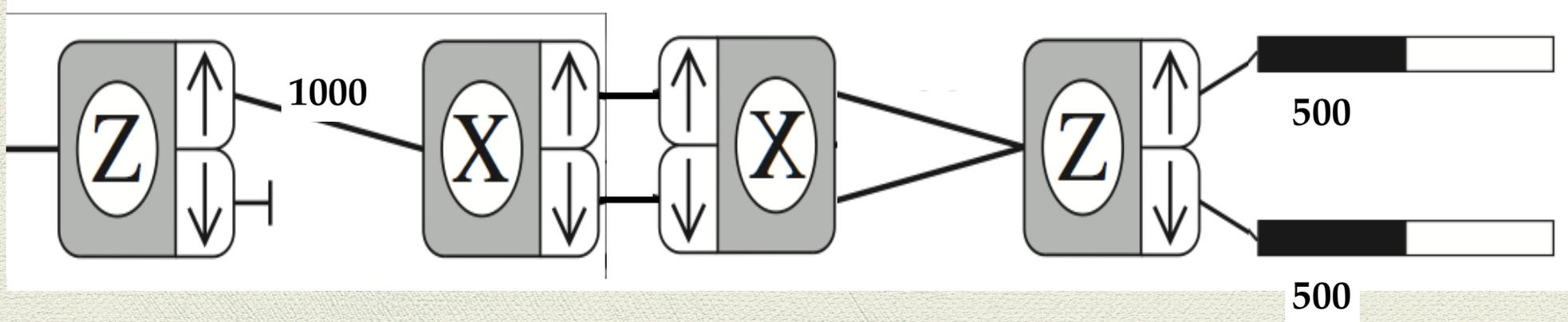
N.B. Come deve essere, la probabilità totale è pari a 1, poichè $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

ESERCIZIO: si possono ripetere tutti gli esperimenti descritti usando fotoni invece di atomi, la polarizzazione (verticale/orizzontale) invece che lo spin (su/giù), un filtro polaroid invece che l'apparato di SG.

Riassumendo.

1. Abbiamo usato il primo apparato di SG per preparare un fascio di atomi tutti con lo stesso valore dello spin
2. Il secondo apparato di SG scompone il fascio di atomi (o ridirige la serie di atomi che arrivano in successione) in due parti con probabilità proporzionale al \cos (ovvero al \sin) al QUADRATO dell'angolo formato dalla direzione del campo magnetico B rispetto a Z
3. La serie di esperimenti precedenti ci mostra che la probabilità finale di passare attraverso una successione di apparati NON è uguale alla somma del prodotto delle probabilità, come in FC!!!

Cosa ci aspettavamo (FC) ... in termini di probabilità



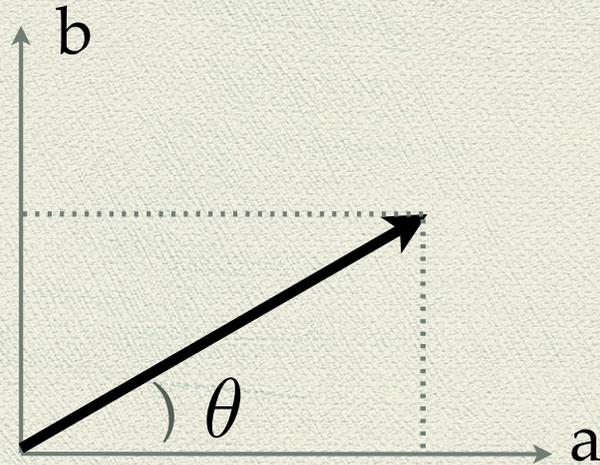
Nota :

$$\theta = 45^\circ$$

$$\cos \theta = \sin \theta = 1/\sqrt{2} \Rightarrow P_+ = P_- = \cos^2 \theta = \sin^2 \theta = 1/2$$

Strumenti matematici.

Un vettore di lunghezza 1 nel piano si scrive come



$$\vec{v} = \cos \theta \hat{a} + \sin \theta \hat{b}$$

Ora, al posto dei due versori usiamo le due alternative:

$$|+\rangle_x \text{ e } |-\rangle_x$$

Possiamo scrivere:

$$|+\rangle_z = \cos \theta |+\rangle_x + \sin \theta |-\rangle_x$$

Come per i vettori usuali, si dice che il vettore $|+\rangle_z$ si scrive come sovrapposizione dei due vettori $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$, con coefficienti \cos e \sin .

Qui lo strumento matematico è lo stesso, diversa l'interpretazione.

☀ In Fisica Quantistica gli **STATI** sono descritti da dei vettori, detti "vettori di stato", tali che:

1. Un generico vettore si può scrivere come sovrapposizione di un certo numero di vettori "di base", che rappresentano le possibili alternative classiche.

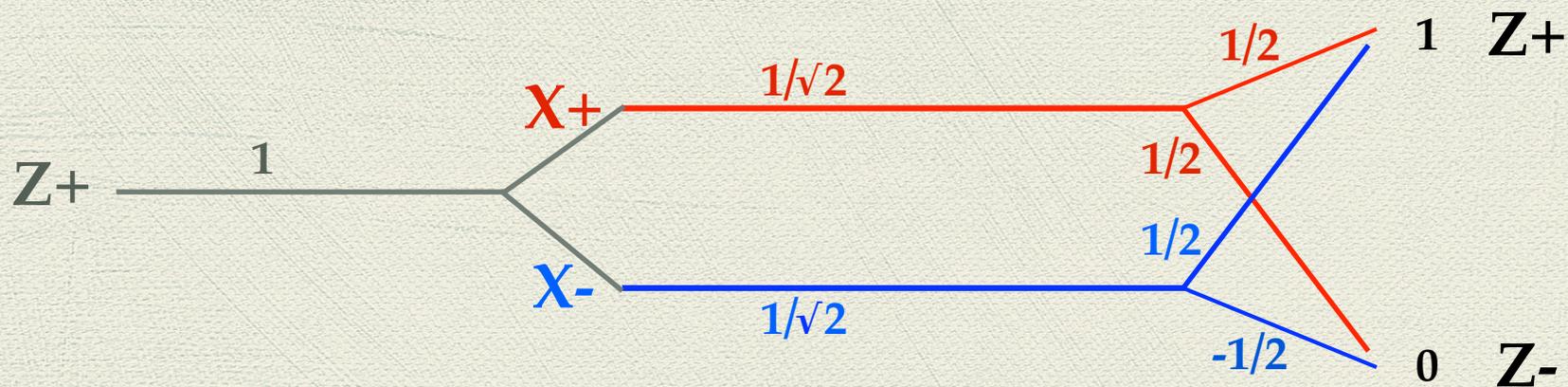
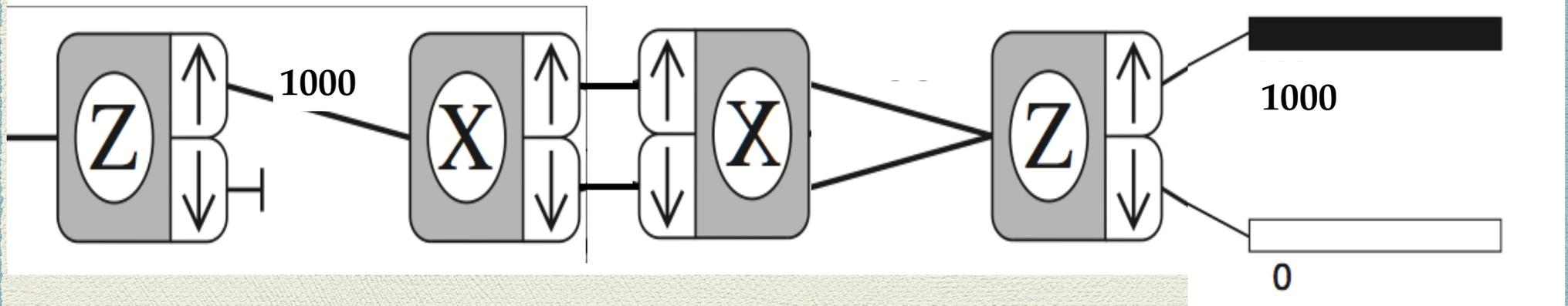
2. I coefficienti di tale sovrapposizione (componenti del vettore) sono delle **AMPIEZZE di PROBABILITÀ**, con le seguenti regole:

☑ **IN SUCCESSIONE, LE AMPIEZZE DI PROBABILITÀ SI MOLTIPLICANO**

☑ **L'AMPIEZZA FINALE È LA SOMMA DELLE POSSIBILI ALTERNATIVE**

☑ **LA PROBABILITÀ FINALE È IL QUADRATO DELLA AMPIEZZA FINALE**

Cosa dice l'esperimento ... in termini di ampiezza di probabilità



$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x$$

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z$$

\Leftrightarrow

$$|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x$$

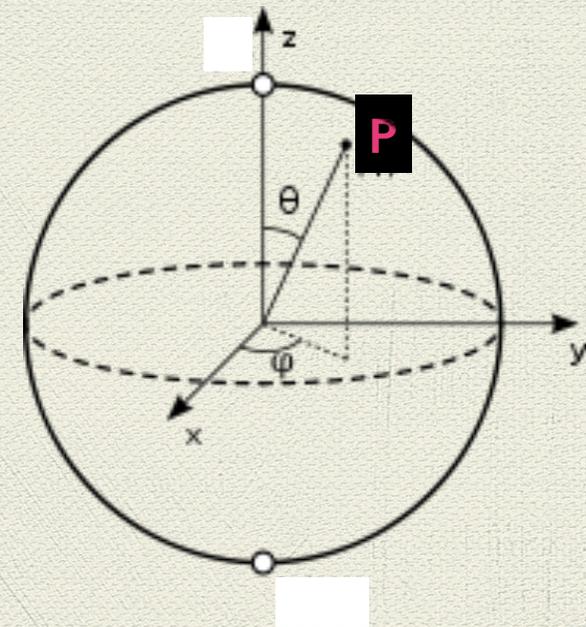
$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z$$

N.B. Esistono anche gli stati $|+\rangle_Y$ e $|-\rangle_Y$:
come li descrivo matematicamente? Tutti i possibili vettori
bidimensionali di norma 1 hanno coefficienti del tipo \cos e
 \sin , ma questi sono usati per gli stati lungo X.

Per descrivere il più generale stato di spin possibile diretto in una
qualunque direzione dello spazio, è **necessario** ricorrere a
combinazioni lineari complesse del tipo

$$|\theta, \phi\rangle = \cos \theta |+\rangle_z + e^{i\phi} \sin \theta |-\rangle_z$$

Non è difficile vedere geometricamente che due
angoli siffatti individuano in maniera univoca un
punto P sulla superficie di una sfera di raggio 1
(detta Sfera di Bloch) e quindi fissano una direzione
(come latitudine e longitudine)



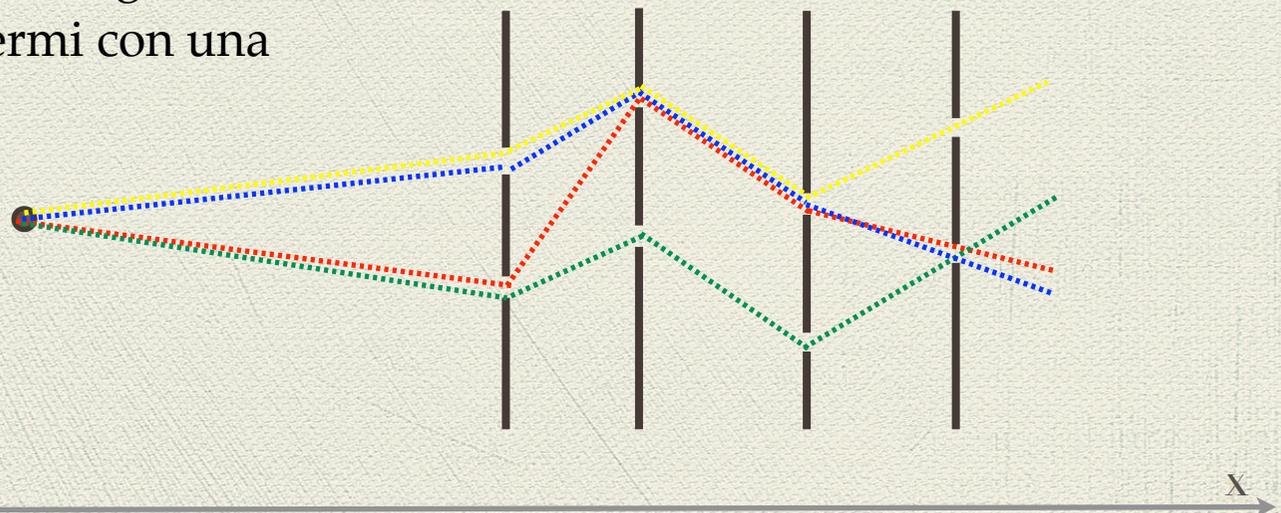
La funzione d'onda

Quanto visto, può essere ripetuto anche per l'esperimento della doppia fenditura, con i due stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ sostituiti dal cammino attraverso la prima e la seconda fenditura.

Possiamo quindi dire che ogni singolo elettrone, se non viene rivelato, si trova in uno stato di sovrapposizione di due possibili cammini, quello che passa attraverso la 1^a e quello che passa attraverso la 2^a fenditura, ciascuno pesato con uguale probabilità $1/2$.

Il fenomeno dell'interferenza è proprio conseguenza di questo stato di sovrapposizione: sappiamo infatti che mettiamo un detector, "costringendo" l'elettrone a scegliere dove passare, la figura di interferenza scompare.

📍 Possiamo pensare di ripetere il ragionamento, interponendo sempre più schermi con una doppia fenditura: ora in prossimità di ogni schermo l'elettrone ha possibilità di scelta tra due cammini.



Lo stato della particella sarà allora una sovrapposizione di tutti i possibili stati indicizzati da tutti i possibili cammini, ciascuno pesato da un coefficiente il cui modulo quadro dà la probabilità che la particella abbia seguito quel cammino.

Nel limite, possiamo pensare che ci sia un possibile cammino per ogni punto dello spazio, pesato da una certa probabilità. Il suo stato è:

- una sovrapposizione lineare degli stati $|x\rangle = | \text{la particella è nel punto } x \rangle$
- ciascuno pesato con un coefficiente (complesso) $\psi(x)$
- il cui quadrato $|\psi(x)|^2$ rappresenta la probabilità che la particella si trovi nel punto x .

Al variare del punto x , $\psi(x)$ rappresenta una funzione (dallo spazio in cui si muove la particella a valori nei numeri complessi) che determina in maniera univoca lo stato della particella:

$\psi(x)$ è detta funzione d'onda (di Schroedinger)

La particella non si trova in un punto preciso dello spazio: possiamo solo dire che essa si trova in un punto specifico x dello spazio con una probabilità $p_x = |\psi(x)|^2$.

Aleatorietà quantistica

Contrariamente a ciò che succede in un esperimento di fisica classica, nel mondo quantistico non possiamo rispondere con un semplice SÌ/NO alla domanda:

<< si realizzerà un certo evento? >>

Un enunciato: <<l'atomo ha spin su>> può essere in fisica classica VERO o FALSO e queste due possibilità sono mutualmente escludentesi;
in fisica quantistica invece l'enunciato può essere contemporaneamente vero e falso, con una certa probabilità di essere vero e una certa probabilità di essere falso.

Solo ripetendo l'esperimento molte volte, possiamo predire con quale probabilità l'evento si verifica / non si verifica.

La fisica quantistica introduce una nuova logica,
intrinsecamente legata al concetto di probabilità.

☞ Anche nel **mondo classico** abbiamo situazioni dominate dalle leggi della probabilità.

In particolare questo è vero quando abbiamo a che fare con tante particelle (o tante variabili) che non siamo in grado di conoscere e seguire una ad una:

ad esempio non possiamo conoscere la velocità di ogni singola molecola dell'aria, ma possiamo dire quale è la velocità più probabile o la velocità media.

L'introduzione di concetti probabilistici in fisica classica è quindi legata alla *nostra impossibilità pratica* di conoscere con precisione tutte le variabili in gioco:

in linea di principio questo sarebbe però possibile e le leggi della meccanica ci permetterebbero quindi di fare previsioni *deterministiche*.

Ad esempio, noi non siamo in grado di prevedere l'esito del lancio di una moneta (testa o croce) solo perchè non siamo in grado di conoscere con (infinita) precisione tutte le variabili che determinano il moto della moneta (distribuzione di massa nella moneta, spinta iniziale, resistenza dell'aria, ...).

H. Poincaré (1903): << Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.

Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto.

Ma non è sempre così, può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. >>

S. de Laplace (1776): <<Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro.

Ma l'ignoranza delle diverse cause che concorrono alla formazione degli eventi come pure la loro complessità, insieme con l'imperfezione dell'analisi, ci impediscono di conseguire la stessa certezza rispetto alla grande maggioranza dei fenomeni.

Vi sono quindi cose che per noi sono incerte, cose più o meno probabili, e noi cerchiamo di rimediare all'impossibilità di conoscerle determinando i loro diversi gradi di verosomiglianza. Accade così che alla debolezza della mente umana si debba una delle più fini ed ingegnose fra le teorie matematiche, la scienza del caso o della probabilità.>>

☞ Nel **mondo quantistico**, al contrario, la descrizione probabilistica ha origini diverse.

Non è il risultato della nostra capacità di conoscere, ma è intrinseca alla natura degli oggetti che stiamo descrivendo.

- Un atomo è descritto con precisione matematica da uno stato, che risulta però intrinsecamente probabilistico rispetto al tipo di osservazioni e misure che noi possiamo fare su di esso: se interponiamo un apparato di SG, talvolta l'atomo ha spin su, talvolta ha spin giù, anche se inizialmente si trova sempre nello stesso stato.

- Inoltre sappiamo dal principio di indeterminazione di Heisenberg, che non è possibile conoscere con precisione alcune coppie di variabili, come posizione e impulso.

● *L'aleatorietà di un fenomeno fisico è:*

*epistemica in fisica classica
ontologica in fisica quantistica*